

# resc

\*\*\*\*\*  
SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE I  
\*\*\*\*\*

**Exercice N°1** 1) 1) c), 2) b), 3) a), 4) c), 5) b) , 6) b), 7) a)ii. b)iii.  
II) 1) Vrai, 2) Vrai, 3) Vrai, 4) Faux 5) Faux .

**Exercice N°2**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+3})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1-\frac{2}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{3}{x^2}})} = \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \sin \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} \text{ on pose } y = \frac{2}{x}. \text{ Si } x \text{ tend vers } +\infty$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin y}{y} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2.$$

alors y tend vers 0,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \sin y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin y}{y} = (-\infty)(1) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x - 3}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{4x} = \frac{\pi}{4}$  d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left( \frac{\pi x - 3}{4x} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{1 - \cos x} \right) = \frac{1}{2} = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} + \frac{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-2})}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{4} = 2. \text{ On a } \cos(\pi x) + 3 + 2x \geq 2 + 2x \text{ et comme}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 2x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\pi x) + 3 + 2x = +\infty.$$

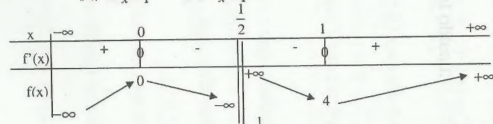
**Exercice N°3** 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

La courbe (C) admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote oblique d'équation  $y = 2x + 1$ .

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1$ . La courbe (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse

$$1, \text{ alors } f'(1) = 0. \text{ On a } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = f'(1) = 0.$$

2)



3) Si  $m \in ]-\infty, 0[ \Rightarrow 2$  solutions ; Si  $m = 0 \Rightarrow$  une seule solution ; Si  $m \in ]0, 4[ \Rightarrow$  pas de solution.  
Si  $m = 4 \Rightarrow$  une seule solution, Si  $m \in ]4, +\infty[ \Rightarrow 2$  solutions.

**Exercice N°4** 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{x-1}$  ; on pose  $y = x - 1$ . Lorsque x tend vers 1, alors y tend vers 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\pi y + \pi)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \pi y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \pi y}{y} \sin \pi y = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \pi y}{\pi y} \right) \pi \sin \pi y = 0. \text{ Ainsi la fonction}$$

g définie par  $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = 0 \end{cases}$  est un prolongement par continuité de f en 1

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( \frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x - 2)}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \left( \frac{2 - \cos x}{\cos x} \right) = \frac{1}{2}.$$

Donc la fonction  $\phi$  définie par  $\begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right) & \text{si } x \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \setminus \{0\} \\ \phi(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

est le prolongement de f en 0.

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2-1}{x-3} = 1 \text{ donc la fonction } \gamma \text{ définie par :}$$

$$\begin{cases} \gamma(x) = \frac{x-2}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ \gamma(3) = 1 \end{cases} \text{ est le prolongement par continuité de f en 3.}$$

**Exercice N°5** 1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $-1 \leq \cos x \leq 1$  donc  $-1 + 3x \leq f(x) \leq 1 + 3x$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 3x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 3x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2) f définie continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a  $f'(x) = 3 - \sin x$ .

Or  $-1 \leq \sin x \Rightarrow 2 \leq 3 - \sin x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donc  $f'(x) > 0$ .

f continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f(\mathbb{R}) = ]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = \mathbb{R}$ .

Comme  $0 \in \mathbb{R}$  et d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . Or

$$f\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{-\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \text{ donc } \alpha \in \left] \frac{-\pi}{6}, 0 \right[.$$

$$\text{Exercice N°6} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+2} - x)(\sqrt{x^2+x+2} + x)}{\sqrt{x^2+x+2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + 1)} = \frac{1}{2}$$



2) Pour tout  $x \in ]-\infty, 1[$ , on a  $-1 \leq \cos \pi x \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq x + \cos \pi x \leq x+1$ . Or Pour tout  $x \in ]-\infty, 1[$   $x-1 < 0$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x + \cos \pi x}{x-1} \leq \frac{x-1}{x-1} = 1. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} \leq \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \cos \pi x}{x-1} \leq \lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1.$$

3)  $x \rightarrow \pi x$  est continue sur  $]-\infty, 1[$  et  $x \rightarrow \cos x$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $x \rightarrow \cos \pi x$  est continue sur  $]-\infty, 1[$ . On a  $x \rightarrow x$  est continue sur  $]-\infty, 1[$ , donc  $x \rightarrow x + \cos \pi x$  est continue sur  $]-\infty, 1[$ . Or  $x \rightarrow x-1$  est continue sur  $]-\infty, 1[$  et  $x-1 \neq 0$  donc  $f$  est continue sur  $]-\infty, 1[$  (A).  
Continuité sur  $[1, +\infty[$  : On a  $x \rightarrow x^2 + x + 2$  est une fonction polynôme continue sur  $\mathbb{R}$  et en particulier

sur  $[1, +\infty[$ . Or  $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ , donc  $x \rightarrow \sqrt{x^2 + x + 2}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

Ainsi  $f : x \rightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} - x$  est continue sur  $[1, +\infty[$  (B).

Continuité à gauche en 1 :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 + 1 + \cos \pi x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 1 + \frac{1 + \cos \pi x}{x-1}$ .

On pose  $y = x-1$ , lorsque  $x$  tend vers 1, alors  $y$  tend vers 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi y + \pi)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \pi y}{\pi y} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} \cdot z = 0 \times \pi = 0.$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + 0 = 1 = f(1) = \sqrt{1+1+2} - 1$  et donc  $f$  est continue à gauche en 1 (C).

D'après (A), (B) et (C)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

4) a)  $f(0) = -1$ ,  $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{3}$ . Ainsi  $f$  est continue sur  $\left[\frac{-1}{2}, 0\right]$  et  $f(0)f\left(\frac{-1}{2}\right) < 0$ , donc d'après le théorème

des valeurs intermédiaires il existe au moins  $\alpha \in \left[\frac{-1}{2}, 0\right]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

$$b) \alpha \in \left[\frac{-1}{2}, 0\right] \Rightarrow \pi \alpha \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow \sin \pi \alpha < 0. \text{ On a } f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha + \cos \pi \alpha}{\alpha - 1} = 0 \Leftrightarrow \cos \pi \alpha = -\alpha.$$

Or  $\sin^2 \pi \alpha = 1 - \cos^2 \pi \alpha \Rightarrow |\sin \pi \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \pi \alpha}$  et comme  $\sin \pi \alpha < 0$  donc  $\sin \pi \alpha = -\sqrt{1 - \alpha^2}$ .

5)  $x \rightarrow \cos x$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos x \neq 0$  et donc  $x \rightarrow \frac{1}{\cos x}$  est continue sur

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . D'autre part, on a  $\frac{1}{\cos x} \in \mathbb{R}$  pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc

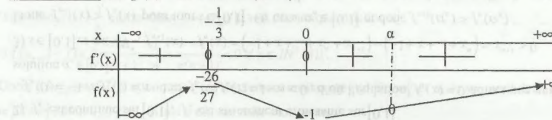
$x \rightarrow f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Continuité à gauche en  $\frac{\pi}{2}$  :

On a  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$  donc  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{2}$  et par suite  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \frac{1}{2} = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Ainsi  $g$

est continue à gauche en  $\frac{\pi}{2}$  et on conclut que  $g$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Exercice N° 7 1a)**  $g(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x+1)$



b)  $g$  est continue et strictement croissante

donc  $g\left(\left[-\infty, -\frac{1}{3}\right]\right) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \left[-\infty, -\frac{26}{27}\right]$ ; or  $0 \notin \left[-\infty, -\frac{26}{27}\right]$  donc l'équation  $g(x) = 0$  n'admet

pas une solution dans  $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ .

\*) Sur  $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$   $g$  est continue et strictement décroissante donc  $g\left(\left[-\frac{1}{3}, 0\right]\right) = \left[g(0), g\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \left[-\frac{26}{27}, 0\right]$ ; or

$0 \in \left[-\frac{26}{27}, 0\right]$  donc l'équation  $g(x) = 0$  n'admet pas une solution dans  $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$ .

\*) Sur  $[0, +\infty[$   $g$  est continue et strictement croissante donc  $g([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$ . Or  $0 \in [-1, +\infty[$  donc l'équation  $g(x) = 0$  admet un unique solution  $\alpha$ . On a  $g(0) = -1 < 0$  et  $g(1) = 2 > 0$  donc  $\alpha \in [0, 1]$ .

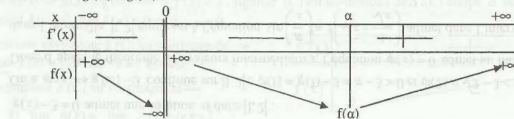
2) a)  $f'(x) = \frac{1}{3}(2x+1) - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{3x^2}$

b)  $g$  admet  $-\frac{26}{27}$  comme maximum absolu sur  $]-\infty, 0]$  donc  $g(x) \leq -\frac{26}{27} \forall x \in ]-\infty, 0]$ .

Ainsi  $g(x) \leq 0 \forall x \in ]-\infty, 0]$ .

Si  $0 \leq x \leq \alpha \Rightarrow g(0) \leq g(x) \leq g(\alpha)$  (car  $g$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ ). Donc  $-1 \leq g(x) \leq 0$ .

Si  $x \geq \alpha \Rightarrow g(x) \geq g(\alpha) = 0$ .



$$c) g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 + \alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1 - \alpha^2}{2}.$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + 1}{3\alpha} = \frac{\frac{1 - \alpha^2}{2} + \alpha^2 + 1}{3\alpha} = \frac{1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 + 2}{6\alpha} = \frac{\alpha^2 + 3}{6\alpha} = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}.$$

**Exercice N° 8 1)** a) On a, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $-1 \leq \sin \frac{\pi}{x} \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq \sqrt{x}$ .

Or pour  $0 < x < 1$ , on a  $0 < 1-x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 1$ .

$$\frac{-\sqrt{x}}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x}}{x-1} \Rightarrow \frac{-\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ . Ainsi  $f$  est continue à droite en 0.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} = 0 = f(0)$ . Ainsi  $f$  est continue à gauche en 0.

On conclut que  $f$  est continue en 0.

c) D'après (\*), on a  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{x}}{x-1} \leq \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{x-1} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} = 1 \times 0 = 0. \text{ Car } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \sin t = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)(\sqrt{x^2 - 2x} - x)}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1\right)} = 1.$$

$$2) a) (W(x)) \times (VoU(x)) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{x}}\right) \times \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi(x-1)}{x}\right)}{\frac{\pi(x-1)}{x}}\right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) \sin\left(\pi - \frac{\pi}{x}\right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = f(x).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (W(x)) \times (VoU(x)). \text{ On a } \lim_{x \rightarrow 1} W(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} VoU(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} VoU(x) = 1.$$

D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow 1} W(x) = \pi$  donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pi$  et par suite  $f$  admet un prolongement par continuité en

1. Ce prolongement est la fonction  $g$  définie par  $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\} \\ g(1) = \pi \end{cases}$

c)  $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 3\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)$ ; cette équation admet dans l'intervalle  $]1, 2[$  une solution équivalente à  $g(x) - 3 = 0$  admet une solution  $\alpha$  dans  $]1, 2[$ .

On a  $\varphi : x \rightarrow g(x) - 3$  continue sur  $]1, 2[$ ,  $\varphi(1) = g(1) - 3 = \pi - 3 > 0$  et  $\varphi(2) = \sqrt{2} - 3 < 0$ .

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet au moins une solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1, 2[$  équivalente à l'équation  $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  admet dans l'intervalle  $]1, 2[$  une solution.

**Exercice N° 9 1)** On a  $x \rightarrow f(x)$  et  $x \rightarrow x^n$  sont deux fonctions continues sur  $[0, 1]$

donc  $g_n$  est continue sur  $[0, 1]$ .

$g_n(0)g_n(1) = f(0)(f(1)-2)$ , or  $f(x) \in [0, 2]$  pour  $x \in [0, 1]$  d'où  $g_n(0)g_n(1) \leq 0$  et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un réel  $a_n \in [0, 1]$  tel que  $g_n(a_n) = 0$ .

2) a) Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $[0, 1]$  tels que  $a < b$ ,  $f$  étant strictement décroissante sur  $[0, 1]$

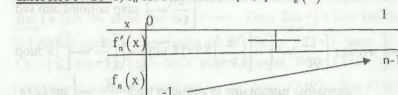
donc  $f(a) > f(b)$ .

$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n \Rightarrow -a^n > -b^n \Rightarrow f(a) - a^n > f(b) - b^n$  Càd  $g_n(a) > g_n(b)$  donc  $g_n$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ .

b)  $g_n(x) = f(x) - x^n$ ,  $g_{n+1}(x) = f(x) - x^{n+1}$ ,  $g_{n+1}(x) - g_n(x) = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

$\Rightarrow g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$ , ainsi  $g_{n+1}(a_n) \geq g_n(a_n)$ . Or  $g_n(a_n) = 0 \Rightarrow g_{n+1}(a_n) \geq g_{n+1}(a_{n+1})$  et comme  $g_{n+1}$  est décroissante sur  $[0, 1]$  et donc  $a_{n+1} > a_n$ ; la suite  $(a_n)$  est strictement croissante.

**Exercice N° 10 1)**  $f_n$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et  $f'_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} > 0$



2)  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$ ,  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ .

$f_n(0) = -1$  et  $f_n(1) = n-1 \Rightarrow f_n(0)f_n(1) = -1 < 0$ , d'où l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha_n \in [0, 1]$ .

3)  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (-1 + x + \dots + x^n + x^{n+1}) - (-1 + x + \dots + x^n) = x^{n+1} > 0$ .

Donc  $f_{n+1}(x) > f_n(x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Or on a  $\alpha_n \in [0, 1]$  et donc  $f_{n+1}(\alpha_n) > f_n(\alpha_n)$ .

Comme  $f_n(\alpha_n) = f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$  et  $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$  donc  $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ . Or  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  donc  $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ . Ainsi la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement décroissante.

**Autre Méthode :**  $f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = \alpha_n^{n+1} > 0$ . Or  $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$  donc  $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ .

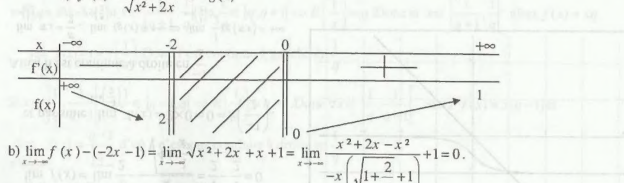
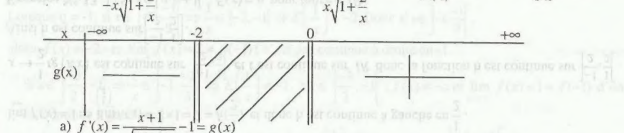
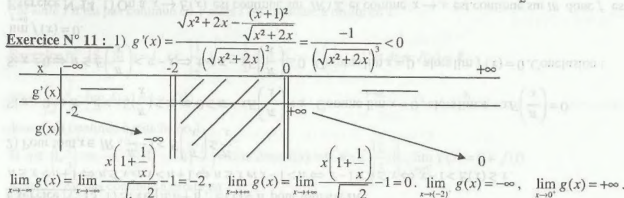


Comme  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $[0,1]$ , donc  $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$  et par suite la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.

4) On a  $f(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow -1 + \alpha_n + \alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^n = 0 \Rightarrow -1 + \alpha_n \frac{1 - \alpha_n^{n+1}}{1 - \alpha_n} = 0$  si  $\alpha_n \neq 1$ .

Pour  $\alpha_n \neq 1$ , on a  $\frac{\alpha_n - \alpha_n^{n+1}}{1 - \alpha_n} = 1$  alors  $\alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1 - \alpha_n$  et donc  $\alpha_n = \frac{1 + \alpha_n^{n+1}}{2}$ .

Pour  $\alpha_n = 1$ , on a  $\frac{1+1}{2} = 1 \Rightarrow$  vrai pour  $\alpha_n = 1$ . Conclusion : pour tout  $n \geq 2$ , on a  $\alpha_n = \frac{1 + \alpha_n^{n+1}}{2}$ .



Donc la droite  $\Delta: y = -2x - 1$  est une asymptote oblique à  $\zeta_f$  au voisinage de  $-\infty$ .

3) a)  $f$  est continue strictement décroissante sur  $]-\infty, -2[ \Rightarrow f(]-\infty, -2[) = ]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)[ = ]-\infty, -2[$ .

Comme  $\frac{1}{n} \in ]-\infty, -2[ \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , alors l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  n'a pas de solution dans  $]-\infty, -2[$ .

$f$  est continue strictement croissante sur  $]0, +\infty[ \Rightarrow f(]0, +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = ]0, +\infty[$ .

Comme  $\frac{1}{n} \in ]0, +\infty[ \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , alors il existe un unique réel  $u_n \in ]0, +\infty[$  tel que  $f(u_n) = \frac{1}{n}$ . On conclut que l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet dans  $]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$  une unique solution  $u_n$ .

b)  $f(u_{n+1}) - f(u_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

Donc  $f(u_{n+1}) < f(u_n)$  et comme  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  et  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont deux éléments de  $]0, +\infty[$ , donc  $u_{n+1} < u_n$ . Ainsi  $u$  est une suite croissante.

**Exercice N° 12 :** 1) a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1} - \frac{8x^2}{2\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1} = \frac{8x^2+2-8x^2}{2(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

b)  $2 \times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$ ,  $f(2 \times 0 - x) = f(-x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$ .

$\Rightarrow f(2 \times 0 - x) + f(x) = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$  et donc  $(0, \frac{1}{2})$  est un centre de symétrie de (C).

2) a) On pose  $g(x) = f(x) - x$ ,  $g'(x) = f'(x) - 1$ . Or  $4x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{4x^2+1} \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ .

Donc  $(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}} \leq 1 \Rightarrow f'(x) - 1 = g'(x) \leq 0$ , ainsi  $g$  est strictement

décroissante sur  $\mathbb{R}$  et donc  $g(\mathbb{R}) = ]\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[ = \mathbb{R}$ .

Comme  $0 \in \mathbb{R}$ , il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$  l'équation  $f(x) = x$  admet une unique

solution  $\alpha$ .  $g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} < 0$ ,  $g(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\sqrt{13}} - \frac{3}{4} > 0$ . Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $\alpha \in ]\frac{3}{4}, 1[$ .

Si  $x \leq \alpha \Rightarrow g(x) \geq g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(x) \geq x$ , signifie (C) est au-dessus de  $\Delta: y = x$ .

Si  $x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(x) < x$ , signifie (C) est au-dessous de  $\Delta$ . (C) coupe  $\Delta$  au point  $A(\alpha, \alpha)$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \Delta_1: y = 0$

est une asymptote à (C) au voisinage de  $-\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \Delta_2: y = 1$  est une

asymptote à (C) au voisinage de  $+\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2f(\frac{1}{2} \lg \pi x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2f(\frac{1}{2} \lg \pi x)$ .

on a  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \pi x = \frac{\pi}{2}$

et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \lg x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2} \lg \pi x = -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2} - \frac{x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

et par suite  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = 2 \times 0 = 0 = h(\frac{\pi}{2})$ .

Ainsi  $h$  est continue à droite en  $\frac{\pi}{2}$ .

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \pi x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \lg x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{2} \lg \pi x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} h(x) = 2 \times 1 = 2 = h(\frac{\pi}{2})$  et donc  $h$  est continue à gauche en  $\frac{\pi}{2}$ .

$x \rightarrow \frac{1}{2} \lg(\pi x)$  est continue sur  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $h$  est continue sur  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

Ainsi  $h$  est continue sur  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

**Exercice N° 13 :** 1) Si  $x \in [n, n+1[$ ,  $E(x) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

$n \leq x < n+1 \Rightarrow n \leq x$  et  $x < n+1 \Rightarrow n \leq x-1 < n \Rightarrow x-1 < n \leq x \Rightarrow x-1 < E(x) \leq x$ .

2) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\pi}{x} - 1 < E(\frac{\pi}{x}) \leq \frac{\pi}{x}$ .

Si  $x > 0 \Rightarrow \pi - x < xE(\frac{\pi}{x}) \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \pi - xE(\frac{\pi}{x}) < x$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \pi - xE(\frac{\pi}{x}) = 0$ .

Si  $x < 0 \Rightarrow \pi \leq E(\frac{\pi}{x}) < \pi - x \Rightarrow x < \pi - xE(\frac{\pi}{x}) \leq 0$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \pi - xE(\frac{\pi}{x}) = 0$ . Conclusion :

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

**Exercice N° 14 :** 1) On a  $x \rightarrow E(x)$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et comme  $x \rightarrow x$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

Continuité de  $f$  en  $n \in \mathbb{Z}$  :  $f(n) = n - (n-n)^2 = n$ .

Si  $x \in [n, n+1[ \Rightarrow E(x) = n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} (x - (x-n)^2) = n = f(n)$ .

Si  $x \in [n-1, n[ \Rightarrow E(x) = n-1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} (x-1) - (x-(n-1))^2 = n-2$ .  $f$  est continue en  $n$  équivaut à  $n = n-2$  alors  $0 = -2$  ce qui est impossible. Donc  $f$  est discontinue en tout point de  $\mathbb{Z}$ . Le domaine de continuité de  $f$  est  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

$g(x) = x - E(x) - [x - E(x)]^2$ ,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

Continuité sur  $\mathbb{Z}$ . Soit  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $g(n) = n - n - [n - n]^2 = 0$ .  $\lim_{x \rightarrow n} g(x) = \lim_{x \rightarrow n} x - n - [x - n]^2 = 0 = g(n)$ .

$\lim_{x \rightarrow n} g(x) = \lim_{x \rightarrow n} (x - (n-1) - [x - (n-1)]^2) = 1 - 1 = 0 = g(n)$ .

Donc  $g$  est continue en tout point  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ . On conclut que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2) Faux car la fonction  $h_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h_1(x) = x - E(x)$  est discontinue sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $h_2$  définie par  $h_2(x) = x - x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $g$  définie par  $g(x) = h_2 \circ h_1(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice N° 15 :** 1) On a  $x \rightarrow f(x)$  et  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  sont deux fonctions continues sur  $]1, 2[$ . Donc la

fonction est continue sur  $]1, 2[$ . On a  $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$  et comme on a  $3 \leq f(x) \leq 4$  pour tout  $x \in [1, 2]$

donc  $\frac{3}{2} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 4$ . Ainsi on a :  $x \rightarrow \frac{f(x)}{x}$  est continue sur  $]1, 2[$ ,  $\frac{3}{2} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 4$  et  $\frac{3}{2} \leq 2 \leq 4$  et par suite

l'équation  $\frac{f(x)}{x} = 2$  admet au moins une solution  $\alpha$  dans  $]1, 2[$ .

2)  $f$  dérivable sur  $]1, 2[$  et  $f'(x) > 2$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $]1, 2[$ . On a  $\frac{f(x)}{x} = 2$  admet une

unique solution  $\alpha$  dans  $]1, 2[$  équivaut à  $h(x) = f(x) - 2x = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]1, 2[$ .

D'après 1) l'équation  $h(x) = 0$  admet au moins une solution  $\alpha$  dans  $]1, 2[$ .

$h'(x) = f'(x) - 2 > 0$ , alors  $h$  est strictement croissante sur  $]1, 2[$  et donc  $\alpha$  est unique.

**Exercice N° 16 :** 1)  $f(-1) = \frac{-3}{2}$ ,  $f(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2}$ ,  $f(0) = \frac{-1}{2}$  et  $f(1) = \frac{1}{2}$ .  $f$  est continue sur

$[-1, \frac{-1}{2}]$ ,  $[\frac{-1}{2}, 0]$ ,  $[0, 1]$ . Or  $f(-1)f(\frac{-1}{2}) < 0$ ,  $f(\frac{-1}{2})f(0) < 0$  et  $f(0)f(1) < 0$  donc il existe

$x_1 \in ]-1, \frac{-1}{2}[$ ,  $x_2 \in ]\frac{-1}{2}, 0[$  et  $x_3 \in ]0, 1[$

vérifiant  $f(x_i) = f(x_i) = f(x_i) = 0$ .

2) a)  $\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha\sin\alpha$  b) On

$= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1 - 2\sin^2\alpha) = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

pose  $X = \cos\alpha$ ;  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0$  ou  $4\cos^2\alpha - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $3\alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$  ou  $\alpha = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  Ainsi

les solutions de l'équation sont  $\frac{\pi}{9}$ ,  $\frac{5\pi}{9}$  et  $\frac{7\pi}{9}$ .

**Exercice N° 17 :** 1) On a :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;  $E(x) = -1 \Leftrightarrow x \in [-1, 0[ \Rightarrow D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$







Donc  $U_n = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$  qui converge vers  $\frac{1}{2}$ .

On a  $1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k+2}$ , on montre que  $V_n = \frac{1}{3n}$  qui converge vers  $\frac{1}{3}$ .

**Exercice N° 5 a)** On a  $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Rightarrow U_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$  qui converge vers 1.

b) On a  $V_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$  or  $(k-1)k \leq k^2 \forall k \geq 2 \Rightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} \Rightarrow V_n - 1 \leq U_n$ .

c)  $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow V$  est une suite croissante ; or  $V$  est majorée par 2

car  $V_n \leq U_n + 1$  et  $U_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$  et donc  $V$  converge vers un réel  $\alpha \leq 2$ .

On a  $V_n \geq V_2 \geq 1$  et par suite  $\alpha \in [1, 2]$ .

**Exercice N° 6 :**

1) a)  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, 1 \leq k \leq n \Rightarrow 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{1 + n^2}$

$\Rightarrow \frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + n} \leq U_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 1} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2 + n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$ .

b) Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$ , alors  $\lim U_n = 1$ .

2)  $\frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \Rightarrow V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{1}{n} \sqrt{n} \Rightarrow \lim V_n = 0$ .

3) a) Puisque  $\forall t \in \mathbb{R}, t-1 < E(t) \leq t \Rightarrow kt-1 < E(kt) \leq kt$

b)  $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kt-1) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kt) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n kt \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{n^2} \left[ t \sum_{k=1}^n k - 1 \right] \leq W_n \leq \frac{1}{n^2} \left( t \sum_{k=1}^n k \right)$

$\Rightarrow \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n} \leq W_n \leq \frac{n+1}{2n}$  Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim W_n = \frac{1}{2}$ .

4)  $\forall n \geq 5, U_n = (C_n^0)^{-1} + (C_n^1)^{-1} + \dots + (C_n^{n-1})^{-1} + (C_n^n)^{-1} = 2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \sum_{k=2}^{n-2} (C_n^k)^{-1}$ .

Comme  $\forall k \in \{2, \dots, n-2\}, C_n^k \geq C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ , on a :  $0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} (C_n^k)^{-1} \leq (n-3) \frac{2}{n(n-1)}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n-2} (C_n^k)^{-1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-3)}{n(n-1)} = 0 \Rightarrow \lim U_n = 2$ .

**Exercice N° 7 :**

1) a)  $\forall x \in ]0, 1[, f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} > 0, f(x) - x = x \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right) = x \left[ \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} \right] < 0$

$\Rightarrow 0 < f(x) < x \forall x \in ]0, 1[$

b) On a  $\forall x \in ]0, 1[, g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0, g(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2+1})} < 0 \forall x \in ]0, 1[$

2) a) Pour  $n=0$ , on a :  $0 < U_0 = \frac{1}{2} < 1$ , vrai pour  $n=0$ .

Supposons que  $0 < U_n < 1$ , montrons que  $0 < U_{n+1} < 1$ .

D'après 1), on a :  $0 < f(U_n) < U_n < 1 \Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$ . Donc  $0 < U_n < 1 \forall n \in \mathbb{N}$ .

b)  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$  et d'après 1) b), on aura :

$0 < g(U_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 < \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 < \frac{U_n^2}{\sqrt{U_n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} U_n \Rightarrow 0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} U_n$ .

c) On a :  $0 < U_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} U_0, 0 < U_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} U_1, \dots, 0 < U_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} U_{n-1}$ .

En multipliant ces inégalités et en simplifiant, on trouve :

$0 < U_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n U_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \forall n \in \mathbb{N}$  et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim U_n = 0$ .

**Exercice N° 8 :** 1)  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{a}{n+1}$

2) a)  $\frac{a}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n+1 \geq 2a \Rightarrow n \geq 2a-1$ . Posons  $n_0$  le plus grand des entiers  $E(2a-1)+1$  et 0

avec  $E(2a-1)$  la partie entière de  $(2a-1)$ . Ainsi  $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq 2a-1 \Rightarrow \frac{a}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

b)  $\forall n \geq n_0, U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n \Rightarrow 0 < U_{n_0+1} \leq \frac{1}{2} U_{n_0}, 0 < U_{n_0+2} \leq \frac{1}{2} U_{n_0+1}, \dots, U_n \leq \frac{1}{2} U_{n-1}$ .

En multipliant membre à membre ces inégalités puis en simplifiant, on obtient :

$\forall n \geq n_0, 0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} U_{n_0}$  et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 0 \Rightarrow \lim U_n = 0$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n!}{8^n + n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \left( \frac{3^n}{n!} + 1 \right)}{n! \left( \frac{8^n}{n!} + 1 \right)} = \frac{0+1}{0+1} = 1$  (car  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ )

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2^n}{n!} + \frac{5^n}{n!}} = \frac{1}{\frac{2^n}{n!} + \frac{5^n}{n!}} = +\infty$

3)  $\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n-2} \times \dots \times \frac{n}{2} \geq 1$  car  $\frac{n}{n-k} > 1 \forall k \in \{0, 1, \dots, n-2\} \Rightarrow \frac{n^n}{n!} = \frac{n^{n-1}}{n!} \times n \geq n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

**Exercice N° 9 :** On a  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$  et  $V_n \geq 0$  ; en multipliant par  $V_n$ , on obtient :

$0 \leq U_n, V_n \leq V_n \leq 1$  et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n V_n = 1 \Rightarrow \lim V_n = 1$

On a  $0 \leq V_n \leq 1$  et  $U_n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq U_n V_n \leq U_n \leq 1$  et comme  $\lim U_n V_n = 1 \Rightarrow \lim U_n = 1$ .

**Exercice N° 10 :** 1)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{2} U_1, U_5 = \frac{3}{4} U_3, \dots, U_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n} U_{2n}$  ; en multipliant tous les termes

et en simplifiant, on obtient :

$U_{2n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} U_1 = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (2n-1)}{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n)} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

$U_4 = \frac{2}{5} U_2, U_6 = \frac{4}{5} U_4, \dots, U_{2n+2} = \frac{2n}{2n+1} U_{2n}$  ; en multipliant tous les termes puis en simplifiant, on obtient :

$U_{2n+2} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{2n}{2n+1} U_2 = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$

2) On a  $U$  est décroissante et  $U_{2n+1} > 0 \Rightarrow \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} < 1$

$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \times \frac{U_{2n}}{U_{2n+1}} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{U_{2n}}{U_{2n+1}}$  ; or  $\frac{U_{2n}}{U_{2n+1}} > 1 \Rightarrow \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} > \frac{2n}{2n+1}$

Ainsi  $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = 1$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{2n}{2n+1}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}} \times \frac{2n}{2n+1} = \left( \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)} \right) \times \frac{2}{2n+1} \times \frac{1}{\pi}$

Comme

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)} \right) \times \frac{2}{2n+1} \times \frac{1}{\pi} \right] = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)} \right) \times \frac{2}{2n+1} \right] = \pi$

**Exercice N° 11 :** 1)  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0$  et par suite  $U$  est croissante.

2) a)  $U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ .

b) Supposons que  $U$  est majorée et comme  $U$  est croissante donc elle est convergente.

On pose  $l = \lim U_n$  ; on a  $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow l - l \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \geq \frac{1}{2}$  ce qui est absurde.

Par suite  $U$  n'est pas majorée et comme  $U$  est croissante, alors elle diverge vers  $+\infty$ .

3) 2<sup>ème</sup> méthode : On a  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  et comme  $\frac{1}{k} \geq \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \Rightarrow U_n \geq \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \sqrt{n}$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$ .

**Exercice N° 12 :** 1)  $1 \leq k \leq n \Rightarrow n+1 \leq n+k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ . En faisant la somme pour

$k$  variant de 1 à  $n$ , on aura :  $n \times \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \leq n \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2n}}{2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}}{2} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} = +\infty$ .

2)  $f$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = 1 - x - \cos x$  ;  $f'(x) = -1 + \sin x \leq 0$  ;  $f$  admet en 0 un maximum absolu

$\Rightarrow f(x) \leq 0 \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos x \geq 1 - x \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Si  $1 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{n+k}}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \geq n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$  et d'après 1), on déduit :

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \geq \frac{1}{n} \left( n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \geq \frac{1}{n} \left( n - \frac{n}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ . Or

$\cos \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \leq 1$ .

On conclut donc que  $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq U_n \leq 1$  et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1$ .

**Exercice N° 13 :** 1) a)  $U_2 = 2 + \frac{1^2}{U_1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

b) Pour  $n=2, U_2 = \frac{5}{2} \in [2, 3]$  vrai pour  $n=2$ .

Supposons que  $n < U_n < n+1$  et montrons que  $n+1 < U_{n+1} < n+2$ .

On a  $n < U_n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{U_n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n^2}{n+1} < \frac{n^2}{U_n} < \frac{n^2}{n} \Rightarrow 2 + \frac{n^2}{n+1} < 2 + \frac{n^2}{U_n} < 2 + \frac{n^2}{n} + 2$

$\Rightarrow \frac{(n+1)^2}{n+1} + \frac{1}{n+1} < U_{n+1} < n+2 \Rightarrow n+1 < n+1 + \frac{1}{n+1} < U_{n+1} < n+2 \Rightarrow n+1 < U_{n+1} < n+2$ .

Conclusion :  $n < U_n < n+1 \forall n \geq 2$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$ .

On a  $n < U_n < n+1 \Rightarrow 1 < \frac{U_n}{n} < \frac{n+1}{n}$  et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n} = 1$ .

c) On a :  $n < U_n < n+1 < U_{n+1} \Rightarrow U_n < U_{n+1}$  et par suite  $U$  est croissante.

d) Supposons que  $U$  est majorée, alors elle est convergente ce qui est impossible car  $\lim U_n = +\infty$ . Donc  $U$  n'est pas majorée.



$$2) W_n = \frac{1}{U_n - n} - 1; \text{ a) } W_1 = \frac{1}{U_1 - 1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - (n+1)} - 1 = \frac{1 - U_{n+1} + n + 1}{U_{n+1} - n - 1} = \frac{-n^2 + nU_n}{U_n + n^2 - nU_n} = \frac{1}{\frac{n^2 - nU_n + n + U_n - n}{(U_n - n)n}} = \frac{1}{W_n + \frac{1}{n}}$$

b) Pour  $n = 1$ ,  $1 - 1 \leq W_1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq W_1 \leq 1$ , vrai pour  $n = 1$ .

Supposons que  $1 - \frac{1}{n} \leq W_n \leq 1$  et montrons que  $1 - \frac{1}{n+1} \leq W_{n+1} \leq 1$ .

$$\text{On a } 1 - \frac{1}{n} \leq W_n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq W_n + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{W_n + \frac{1}{n}} \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq W_{n+1} \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leq W_{n+1} \leq 1.$$

**Conclusion :**  $1 - \frac{1}{n} \leq W_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ .

c) Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 1$ .

$$\text{On a } W_n = \frac{1}{U_n - n} - 1 \Rightarrow U_n - n = \frac{1}{W_n + 1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - n) = \frac{1}{2}.$$

$$3) \text{ a) } S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k W_k, \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k (W_k - 1) = S_n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = S_n - \frac{1}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) = S_n - \frac{n+1}{2n}$$

$$\text{b) } 1 - \frac{1}{k} < W_k < 1 \Rightarrow -1 < k(W_k - 1) < 0 \Rightarrow -n < \sum_{k=1}^n k(W_k - 1) < 0 \Rightarrow -\frac{1}{n} < S_n - \frac{1+n}{2n} < 0 < \frac{1}{n} \Rightarrow \left| S_n - \frac{1+n}{2n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( S_n - \frac{1+n}{2n} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

**Exercice N° 14** 1) On a  $U_0 = 1 \Rightarrow U_0 \geq 1$ , vrai pour  $n = 0$ .

Supposons que  $U_n \geq 1$  et montrons que  $U_{n+1} \geq 1$ .

$$U_{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{U_n} \geq 0 \Rightarrow U_n + \frac{2}{U_n} \geq 1 \Rightarrow U_{n+1} \geq 1. \text{ Conclusion : } U_n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

b)  $U_{n+1} - U_n = \frac{2}{U_n} \geq 0$  et donc  $U$  est croissante.

c) Supposons que  $U$  est majorée, alors elle est convergente. On pose  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ .

On aura :  $l = l + \frac{2}{l} \Rightarrow 2 = 0$  ce qui est impossible. Par suite  $U$  n'est pas majorée. Donc  $U$  diverge vers  $+\infty$ .

$$2) \text{ a) } V_{n+1} - V_n = \frac{(U_{n+1})^3}{4} - \frac{U_n^3}{4} = \frac{1}{4} \left( 4 + \frac{4}{U_n} \right) = 1 + \frac{1}{U_n} \geq 1$$

$$\text{b) Pour } n = 1, V_1 = \frac{U_1^3}{4} = \frac{9}{4} \geq 1, \text{ vrai pour } n = 1.$$

Supposons que  $V_n \geq n$  et montrons que  $V_{n+1} \geq n+1$ .

On a  $V_{n+1} \geq 1 + V_n \geq 1 + n$ .

Conclusion :  $V_n \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = +\infty$ .

c) On a  $V_n \geq n \Rightarrow 4V_n \geq 4n \Rightarrow U_n^2 \geq 4n \Rightarrow 1 + \frac{1}{U_n^2} \geq 1 + \frac{1}{4n} \Rightarrow 1 \leq V_{n+1} - V_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$ . Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{4n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (V_{n+1} - V_n) = 1$$

**Exercice N° 15**  $0 \leq U_0 = 0 \leq \frac{\pi}{2}$ , vrai pour  $n = 0$ . Supposons que  $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$  et montrons que  $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ .

La fonction  $\cos$  est décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$$\cos 0 \geq \cos(U_n) \geq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 1 \geq \cos(U_n) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \cos U_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$$

Conclusion :  $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

2) a)  $U_{n+1} > U_n$  et  $U_n$  et  $U_{n+1}$  sont dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , alors

$$\cos(U_{n+1}) < \cos(U_n) \Rightarrow \frac{1}{2} \cos(U_{n+1}) < \frac{1}{2} \cos(U_n) \Rightarrow U_{n+2} < U_{n+1}$$

$$U_{n+2} < U_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos(U_{n+2}) > \frac{1}{2} \cos(U_{n+1}) \Rightarrow U_{n+3} > U_{n+2}$$

b) Supposons que  $U$  est croissante  $\Rightarrow U_{n+2} > U_{n+1}$  ce qui est faux.

Supposons que  $U$  est décroissante  $\Rightarrow U_{n+3} < U_{n+2}$  ce qui est faux.

Donc  $U$  n'est pas monotone.

$$3) \frac{1}{2} \cos x = x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x - x = 0. \text{ On pose } g(x) = \frac{1}{2} \cos x - x; g \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{et } g'(x) = -\frac{1}{2} \sin x - 1 < 0 \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Donc } g \text{ est strictement décroissante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

D'autre part, on a :  $g$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $g(0) \times g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$ , donc d'après le théorème des

valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  possède une seule solution  $\alpha$  dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

4) Par récurrence sur  $n$ , la propriété à montrer est " $U_n \neq \alpha \forall n \in \mathbb{N}$ ".

Pour  $n = 0$ ,  $\frac{1}{2} \cos U_0 = \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2} \neq U_0 = 0$ , donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

On suppose que la propriété est vraie à l'ordre  $n$  et montrons qu'elle est vraie à l'ordre  $n+1$ .

D'après l'hypothèse de récurrence  $U_n \neq \alpha \Rightarrow U_n > \alpha$  ou  $U_n < \alpha$  et comme la fonction  $x \mapsto \cos x$  est décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , donc on aura  $\frac{1}{2} \cos U_n < \alpha$  ou  $\frac{1}{2} \cos U_n > \alpha$  ce qui donne que  $U_{n+1} \neq \alpha$  et par suite

la propriété est vraie à l'ordre  $n+1$ .

Conclusion :  $U_n \neq \alpha \forall n \in \mathbb{N}$

5) a) On pose la fonction  $k(x) = \sin x - x$  pour  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ; la fonction  $k$  est dérivable sur

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } k'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Ainsi } k \text{ est décroissante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow k(x) \leq k(0) = 0 \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \leq x \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{D'après ce qui précède on a : si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow (-x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin(-x) \leq (-x)$$

$$\Rightarrow \sin x \geq x \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]. \text{ On conclut donc que } |\sin x| \leq |x| \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{b) On a } \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos y \right| = \left| \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \forall (x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$$

$$\text{Si } x \text{ et } y \text{ dans } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \left| \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq 1$$

$$\text{Si } x \text{ et } y \text{ dans } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{x-y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \leq \left| \frac{x-y}{2} \right| \Rightarrow \left| \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos y \right| \leq \frac{1}{2} |x-y|$$

$$6) \text{ a) On a } U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \left| \frac{1}{2} \cos U_n - \frac{1}{2} \cos \alpha \right| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

b) d'après 6) a), on a :

$$0 < |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|$$

$$0 < |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_1 - \alpha|$$

$$\dots$$

$$0 < |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

En multipliant ces inégalités et en simplifiant, on obtient :  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

c) D'après 6) b), on a :  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ , par passage à la limite, on aura :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n - \alpha| = 0 \text{ et par suite } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \alpha$$

7) a) Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n U_k \Rightarrow S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \geq 0$  et donc  $S$  est croissante.

b) Supposons que  $S_n$  est convergente vers un réel  $l \Rightarrow 0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n+1} \geq 0 \Rightarrow \alpha = 0$  ce qui est absurde. Par suite la suite  $(S_n)$  ne peut être convergente.

c) Par l'absurde : supposons que  $(S_n)$  est majorée, comme  $(S_n)$  est croissante, alors elle converge ce qui est impossible. Ainsi  $(S_n)$  n'est pas majorée et puisque elle est croissante, alors elle diverge vers  $+\infty$ .

**EXERCICE N° 16** 1) soit  $n \in \mathbb{N}$  ;  $U_{n+2} = \frac{1}{(U_{n+1})^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{U_n}\right)^2} = (U_n)^4$ .

$$2) \text{ a) } * \text{ Pour } n = 0, V_0 = U_1 = \frac{1}{U_0^2} = \frac{1}{4}; 0 < V_0 < \frac{1}{2} \text{ (vérifiée)}$$

\* Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $0 < V_n \leq \frac{1}{2}$  et montrons que  $0 < V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ .

On a :  $V_{n+1} = U_{2n+3} = U_{2n+1+2} = (U_{2n+1})^4$  donc  $V_{n+1} = V_n^4$ , on a :

$$0 < V_n \leq \frac{1}{2} \text{ donc } 0 < V_n^2 \leq \frac{1}{16} \leq \frac{1}{2} \text{ d'où } 0 < V_{n+1} \leq \frac{1}{2} \text{ ainsi pour tout } n \geq 0; 0 < V_n \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) Soit } n \in \mathbb{N}; \text{ On a : } 0 < V_n \leq \frac{1}{2} \text{ donc } 0 < V_n^3 \leq \frac{1}{8} \text{ d'où } 0 < V_n^4 \leq \frac{1}{8} \text{ ainsi pour tout } n; 0 < V_{n+1} \leq \frac{1}{8} V_n.$$

$$\text{c) Pour } n = 0; V_0 = \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^0 = \frac{1}{4} \text{ donc } V_0 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^0 \text{ (vérifié)}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; supposons que  $V_n \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^n$  et montrons que  $V_{n+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$ .

$$\text{On a } V_n \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^n \text{ donc } \frac{1}{8} V_n \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} \text{ de plus } V_{n+1} \leq \frac{1}{8} V_n \text{ d'où } V_{n+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} \text{ Ainsi pour}$$

$$\text{tout } n \geq 0; V_n \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^n.$$

$$\text{d) On a } 0 < V_n \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^n; n \geq 0; \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0 \text{ et par suite } \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0$$



3) a) Pour  $n=0$  ;  $W_0 = U_0 = 2$  ;  $W_0 \geq 2$  (Vérifié)

Soit  $n \in \mathbb{N}$  ; supposons que  $W_n \geq 2$  et montrons que  $W_{n+1} \geq 2$ .

$$W_{n+1} = U_{2n+2} = (U_{2n})^2 = W_n^2. \text{ On a : } W_n \geq 2 \Leftrightarrow (W_n)^2 \geq 16 \geq 2 \Rightarrow W_{n+1} \geq 2 \text{ ainsi pour tout } n \in \mathbb{N} ; W_n \geq 2.$$

b) On a :  $W_n \geq 2 \Leftrightarrow W_n^2 \geq 8 \Leftrightarrow W_n^4 \geq 8W_n$  d'où  $W_{n+1} \geq 8W_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

c) Pour  $n=0$  ;  $W_0 = 2$  et  $8^0 = 1$  donc  $W_0 \geq 8^0$  (Vérifié)

Soit  $n \in \mathbb{N}$  ; supposons que  $W_n \geq 8^n$  et montrons que  $W_{n+1} \geq 8^{n+1}$  ; On a :  $W_n \geq 8^n \Leftrightarrow 8W_n \geq 8^{n+1}$  de plus  $W_{n+1} \geq 8W_n$  d'où  $W_{n+1} \geq 8^{n+1}$  ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $W_n \geq 8^n$ .

4) On a :  $V_n = U_{2n+1}$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = 0$  ; On a  $W_n = U_{2n}$  et  $W_n \geq 8^n$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^n = +\infty$  car  $8 > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty$

Donc la suite  $(W_n)$  diverge vers  $(+\infty)$ .

**Exercice N° 17 1)** a) pour  $n=0$ ,  $-1 < U_0 = -\frac{1}{2} < 0$ , vrai pour  $n=0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $-1 < U_n < 0$  et montrons que  $-1 < U_{n+1} < 0$ . On a  $-1 < U_n < 0 \Rightarrow 0 < 1+U_n < 1$ , de même on voit que

$$0 < U_n^2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} < 1. \text{ En multipliant les deux inégalités, on obtient :}$$

$$0 < \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1 < 0 \Rightarrow -1 < U_{n+1} < 0.$$

**Conclusion :**  $-1 < U_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

b)  $U_{n+1} - U_n = (1+U_n) \left[ \frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1 \right] < 0$  et donc  $U$  est décroissante.  $U$  décroissante minorée par  $-1$ , alors  $U$  converge vers un réel  $l$ .

Soit  $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$ ,  $l \in [-1, 0]$  car  $-1 < U_n < 0$  et comme  $f$  est continue en  $l$ , alors  $l$  vérifie la relation :

$$l = f(l) \Leftrightarrow (l+1) \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+l^2}} \right] = 0 \Leftrightarrow l = -1 \text{ ou } \sqrt{1+l^2} = 1 \Leftrightarrow l = -1 \text{ ou } l = 0. \text{ Or } U \text{ est décroissante, alors } l = -1.$$

2) a)  $U$  est décroissante, alors  $U_n \leq U_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow U_n^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{1+U_n^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}} (1+U_n)$

$$\Rightarrow 1+U_{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{5}} (1+U_n)$$

b) Par récurrence : pour  $n=0$ ,  $U_0+1 = \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1+U_0 \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^0$  Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons

$$\text{que } 1+U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \text{ et montrons que } 1+U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1} \text{ On a } 1+U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} (1+U_n) \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1} \Rightarrow 1+U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1} \quad \text{Conclusion : } 1+U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c) On a :  $0 < 1+U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \Rightarrow -1 < U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n - 1$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$ .

3) a) On a

$$-1 < U_n < 0 \Rightarrow 0 < U_n^2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1+U_{n+1} > \frac{1+U_n}{\sqrt{2}}$$

b) On a  $U_{n+1} + 1 > \frac{1+U_n}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}(1+U_{n+1}) - U_n > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^n [\sqrt{2}(1+U_{k+1}) - U_k] > n+1 \Rightarrow V_n > n+1$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ .

4) On a  $-1 < U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \Rightarrow -(n+1) < \sum_{k=0}^n U_k \leq \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} - (n+1)$

$$\Rightarrow -\frac{2(n+1)}{n} < \sum_{k=0}^n U_k \leq \frac{\sqrt{5} \left[ 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1} \right]}{n(\sqrt{5}-2)} - \frac{2(n+1)}{n} \text{ On pose}$$

$$W_n = \frac{2(n+1)}{n} \text{ et } T_n = \frac{\sqrt{5} \left[ 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1} \right]}{n(\sqrt{5}-2)} - \frac{2(n+1)}{n} \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n U_k = -2.$$

**Exercice N° 18 1)** Par récurrence sur  $n$ . Pour  $n=0$ , on a  $U_0 = 5 > 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $U_n > 0$  et montrons que  $U_{n+1} > 0$ .

On a  $2x^2 - x + 8 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2U_n^2 - U_n + 8 > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 0$ . Conclusion :  $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

2) On a  $U_{n+1} - 2 = \frac{2U_n^2 - U_n + 8}{U_n^2 + 3} - 2 = \frac{2 - U_n}{U_n^2 + 3}$

3) Supposons que  $U_n \geq 2$  et montrons que  $U_{n+1} < 2$  et  $U_{n+2} > 2$ .

On a  $U_{n+1} - 2 = \frac{2 - U_n}{U_n^2 + 3} = \frac{-(U_n - 2)}{U_n^2 + 3} < 0 \Rightarrow U_{n+1} < 2$ .  $U_{n+2} - 2 = \frac{2 - U_{n+1}}{U_{n+1}^2 + 3} = \frac{-(U_{n+1} - 2)}{U_{n+1}^2 + 3} > 0 \Rightarrow U_{n+2} > 2$

4) On a  $U_0 = 5 > 2 \Rightarrow U_1 < 2$  et  $U_1 > 2$  et par suite  $U$  n'est ni croissante ni décroissante.

Ainsi  $U$  n'est pas monotone.

5) Pour  $n=0$ , on a  $U_0 = 5 \neq 2$ , vrai pour  $n=0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $U_n \neq 2$  et montrons que  $U_{n+1} \neq 2$ . On a  $U_{n+1} - 2 = \frac{2 - U_n}{U_n^2 + 3} \neq 0$  car  $U_n \neq 2$  et donc  $U_{n+1} \neq 2$ . Conclusion :  $U_n \neq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

6) On a  $|U_n - 2| = \frac{|U_n - 2|}{U_n^2 + 3} \leq \frac{1}{3} |U_n - 2|$  puisque  $U_n^2 + 3 \geq 3$  donc  $\frac{1}{U_n^2 + 3} \leq \frac{1}{3}$

$$7) a) 0 < |U_1 - 2| \leq \frac{1}{3} |U_0 - 2|$$

$$0 < |U_2 - 2| \leq \frac{1}{3} |U_1 - 2|$$

$$\dots \dots \dots$$

$$0 < |U_n - 2| \leq \frac{1}{3} |U_{n-1} - 2|$$

En multipliant ces inégalités puis en simplifiant, on obtient :  $|U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - 2| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2.$$

8)  $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$  ; a)  $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} > 0$  donc  $(S_n)$  est strictement croissante.

b) Par l'absurde. On suppose que  $(S_n)$  est majorée, donc elle converge.

On pose  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et comme  $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = 0 \Rightarrow 2 = 0$  ce qui est absurde.

Par suite  $(S_n)$  n'est pas majorée.

c) D'après 8) a), on a  $(S_n)$  est strictement croissante et comme elle n'est pas majorée, on conclut qu'elle diverge vers  $+\infty$ .

**Exercice N° 19 1)**  $U_0 \in ]-1, 0]$

a) Montrons, par récurrence, que  $-1 < U_n < 0$ . Pour  $n=0$ , on a  $-1 < U_0 < 0$ , vrai à l'ordre 0.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $-1 < U_n < 0 \Rightarrow 0 < 1+U_n < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{1+U_n} < 1 \Rightarrow$

$$-1 < U_n \sqrt{1+U_n} < 0 \Rightarrow -1 < U_{n+1} < 0. \text{ Conclusion : } -1 < U_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) On a  $U_{n+1} - U_n = U_n (\sqrt{1+U_n} - 1) = \frac{U_n^2}{\sqrt{1+U_n} + 1} > 0$  et donc  $U$  est croissante.

c) La suite  $U$  est croissante majorée par 0, donc elle est convergente vers un réel  $l$ .

Posons pour  $x \in [-1, 0]$ ,  $f(x) = x\sqrt{x+1}$  ;  $f$  est continue sur  $[-1, 0]$ .

Comme  $U_n \in ]-1, 0[ \Rightarrow l \in [-1, 0]$  et par suite  $f$  est continue en  $l$ . Donc  $l$  vérifie la relation

$$f(l) = l \Leftrightarrow l = l\sqrt{1+l} \Leftrightarrow l = 0.$$

2) a) Montrons d'abord que  $U_n > 0$ . On a  $U_0 > 0$  et si on suppose que  $U_n > 0$ , on en déduit facilement que

$$U_{n+1} > 0. \text{ Donc } U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \text{ On a } \frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{1+U_n} > 1 \Rightarrow U \text{ est croissante.}$$

$$b) \frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{1+U_n} \geq \sqrt{1+U_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c) On a :

$$\frac{U_1}{U_0} \geq \sqrt{1+U_0}$$

$$\frac{U_2}{U_1} \geq \sqrt{1+U_1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} \geq \sqrt{1+U_{n-1}}$$

En multipliant membre à membre ces inégalités puis en simplifiant, on obtient :

$$\frac{U_n}{U_0} \geq (\sqrt{1+U_0})^n \Rightarrow U_n \geq U_0 (\sqrt{1+U_0})^n ; \text{ or } \sqrt{1+U_0} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n (\sqrt{1+U_0})^n = +\infty. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

3) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq 1+x \leq 1+x+\frac{x^2}{4} = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x \leq x\sqrt{1+x} \leq x+\frac{x^2}{2}$

4) a) On pose  $h_n = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $R_n = 1^2+2^2+\dots+n^2$ .

On a  $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$ . Donc, on a

$$2^3 = 1^3+3 \times 1^2+3 \times 1+1$$

$$3^3 = 2^3+3 \times 2^2+3 \times 2+1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$(n+1)^3 = 1+3R_n+3h_n+1 \Rightarrow R_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \text{ On pose } S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2}\right)$$

b) On a  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq f(x) \leq x+\frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{k}{n^2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{2n^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \leq S_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \Rightarrow \frac{n+1}{2n} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2}.$$







$$l = \frac{1}{l} \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0 \text{ avec } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$$

$$e) l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et comme } l \geq 0 \Rightarrow l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

**Exercice N° 25** Il est clair que si  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire, alors elle converge.

Réciproquement, supposons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l \in \mathbb{R}$ . Il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq p, |U_n - l| \leq \frac{1}{3}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq p$ , on a  $|U_n - U_p| \leq |U_n - l| + |l - U_p| \leq \frac{2}{3} < 1$ .

Comme  $U_n$  et  $U_p$  sont dans  $\mathbb{Z}$ , alors  $U_n = U_p$  par suite  $U$  est stationnaire.

**Exercice N° 26** 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère l'équation  $y = 1 + \frac{n}{y} \Leftrightarrow y^2 - y - n = 0$ ; la racine positive de

cette équation est  $y_n = \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 1$ , on a

$$2) \frac{n}{y_{n-1}} = \frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}} \text{ et } \frac{n+1}{y_{n+1}} = \frac{2(n+1)}{1+\sqrt{4n+5}}. \frac{n}{y_{n-1}} - \frac{n+1}{y_{n+1}} = \frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}} - \frac{2n+2}{1+\sqrt{4n+5}}$$

$$= \frac{2[(n\sqrt{5+4n})^2 - (1+(n+1)\sqrt{4n-3})^2]}{(1+\sqrt{5+4n})(1+\sqrt{4n-3})(n\sqrt{4n+5}+1+(n+1)\sqrt{4n-3})} \Rightarrow \text{le signe de } \frac{n}{y_{n-1}} - \frac{n+1}{y_{n+1}} \text{ est celui de}$$

$$(n\sqrt{5+4n})^2 - (1+(n+1)\sqrt{4n-3})^2 = 2((n+1)(1-\sqrt{4n-3})) \leq 0 \forall n \geq 1. \text{ Ainsi } \frac{n}{y_{n-1}} \leq \frac{n+1}{y_{n+1}} \forall n \geq 1.$$

2) a) Soit  $(U_n)$  la suite des nombres réels définie par  $U_1 = 1$  et  $U_{n+1} = 1 + \frac{n}{U_n} \forall n \geq 1$ .

Pour  $n = 1$ , on a  $y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $U_2 = 2$  et  $U_2 = 2$  et donc on a :  $y_1 \leq U_2 \leq y_2$ . Soit  $n \geq 1$ , supposons que

$y_n \leq U_{n+1} \leq y_{n+1}$  et montrons que  $y_{n+1} \leq U_{n+2} \leq y_{n+2}$ . Comme

$$y_n > 0, y_{n+1} > 0 \text{ et } y_n \leq U_n \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}} \leq \frac{1}{U_n} \leq \frac{1}{y_n}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{y_n} \leq \frac{n+1}{U_n} \leq \frac{n+1}{y_{n+1}} \Rightarrow y_{n+1} = 1 + \frac{n+1}{y_n} \leq 1 + \frac{n+1}{U_n} \leq 1 + \frac{n+1}{y_{n+1}}. \text{ D'après 1) b), on a}$$

$$\frac{n+1}{y_n} \leq \frac{n+2}{y_{n+1}} \Rightarrow y_{n+1} \leq U_{n+2} \leq y_{n+2}. \text{ Conclusion : } y_n \leq U_{n+1} \leq y_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$b) \text{ On a : } \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1+\sqrt{1+4n}}{\sqrt{4n}} \geq \frac{U_{n+1}}{\sqrt{4n}} \geq \frac{U_n}{\sqrt{4n}} = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n}} \forall n \geq 2.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{1+4n}}{\sqrt{4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n}} = 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{\sqrt{4n}} = 1.$$

\*\*\*\*\*  
SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE  
\*\*\*\*\*

**Exercice N° 11** b) 2) b) ; 3) i) c) ; 4) a) ; 5) a)

**Exercice N° 21** f(1) = 2; la courbe  $\zeta_f$  présente une tangente horizontale au point d'abscisse 1 donc  $f'(1) = 0$ . De même  $f'(3) = 0$ .

2)  $f'(x) \geq 0$  si et seulement si  $f$  est croissante; d'après le graphique :  $f$  est croissante sur  $]-\infty, 1]$  et  $[3, +\infty[$  et est décroissante sur  $[1, 3]$ . Donc  $f'(x) \geq 0 \forall x \in ]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ .

3) On a  $f(2) = 0$  donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$ . Or  $f'(2)$  est le coefficient directeur de la

tangente à la courbe  $\zeta_f$  au point d'abscisse 2,  $\Delta = (AB); A(0, 6)$  et  $B(2, 0)$ ,  $f'(2) = \frac{0-6}{2} = -3$ .

4)  $f$  est croissante sur  $]-\infty, 1]$  donc  $f'(x) \geq 0$ ; la courbe  $\zeta_f$  de  $f'$  est située au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle  $]-\infty, 1]$  et par suite A) et C) ne conviennent pas.

La courbe B) est la représentation graphique de la fonction  $f'$ .

**Exercice N° 3**  $f$  dérivable en  $\alpha \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - 0}{x - \alpha} = f'(\alpha)$ .

$g$  est dérivable en  $\alpha \Rightarrow g'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x)}{x - \alpha}$ , donc  $\frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x)}{f(x) - f(\alpha)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x)}{f(x)}$  (\*).

On pose  $f(x) = x - 1$  et  $g(x) = \sin \pi x$ ,  $f(1) = g(1) = 0$  et  $f'(1) = 1 \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \frac{g'(1)}{f'(1)} = \frac{\pi \cos \pi}{1} = -\pi$ . De même

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}} = \frac{g'(\frac{\pi}{4})}{f'(\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

**Exercice N° 4**  $f(x) = x - \sin x$ ,  $f$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Ainsi  $f$  est

strictement croissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(x) \geq f(0) = 0 \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin x \leq x \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (I).

$g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ ,  $g$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$g''(x) = -\sin x + x \geq 0 \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Donc  $g'$  est strictement croissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow g'(x) \geq g'(0) = 0 \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Alors  $g$  est strictement croissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (II).

$$\Rightarrow g(x) \geq g(0) = 0 \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow -x \leq \frac{x^3}{6} \leq \sin x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \text{ (2). (1) et (2) donnent :}$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x + \frac{x^3}{6} \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \text{ (3).}$$

b)  $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ , on a :  $-x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et d'après (3) :

$$-x - \frac{(-x)^3}{6} \leq \sin(-x) \leq -x + \frac{(-x)^3}{6} \Rightarrow -x + \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq -x - \frac{x^3}{6} \text{ (4).}$$

De (3) et (4), on a :  $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : |\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$  et par suite  $|\frac{\sin x - x}{x^3}| \leq \frac{1}{6} \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ .

2) On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{6} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 = h(0) \Rightarrow h$  est continue en 0.

On a  $|\frac{\sin x - x}{x^2}| \leq \frac{1}{6} \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \Rightarrow |\frac{\sin x - x}{x^2}| \leq \frac{1}{6}$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$  et par suite  $h$  est dérivable en 0 et  $h'(0) = 0$ .

**Exercice N° 51** a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0; ( $\zeta_f$ ) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à droite verticale dirigée vers le bas.

b) Soit  $a$  et  $b$  deux réels positifs tel que  $a < b$

$$f(a) - f(b) = \sqrt{\frac{b}{b+2}} - \sqrt{\frac{a}{a+2}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{b+2}}}{\sqrt{\frac{b}{b+2} + \frac{a}{a+2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{b+2} + \frac{a}{a+2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{b(a+2) + a(b+2)}{(b+2)(a+2)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2ab + 2b + ab + 2a}{(b+2)(a+2)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2(a+b) + 2(a+b)}{(b+2)(a+2)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4(a+b)}{(b+2)(a+2)}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a+b}{(b+2)(a+2)}}}$$

$> 0$  ou  $0 \leq a < b$  donc  $f(a) - f(b) > 0$  d'où  $f(a) > f(b)$  ainsi  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}} = 0$  donc la droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote

horizontale à ( $\zeta_f$ ) au voisinage de  $(+\infty)$ .

2) a) Soit  $a$  et  $b$  deux réels de  $[0, 1]$  tel que  $a < b \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$  donc  $g(a) < g(b)$ , d'où  $f$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ .

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = +\infty$$

3) a) Soit  $x \in [0, 1]$ ;  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ . On a :

$f$  et  $g$  sont continues sur  $[0, 1]$  donc  $(f - g)$  est continue sur  $[0, 1]$

et en particulier sur  $[0, \frac{1}{2}]$ .

$$(f - g)(0) = 1 \text{ et } (f - g)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{5} \text{ on a } (f - g)(0) \times (f - g)\left(\frac{1}{2}\right) < 0;$$

$f$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$  et  $(-g)$  est strictement

croissante sur  $[0, 1]$  donc  $(f - g)$  est strictement décroissante

sur  $[0, 1]$  ainsi l'équation  $f(x) = g(x)$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0, \frac{1}{2}[$ .

b)  $0.3 < \alpha < 0.4$ .

4)  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ ;  $g(x) \geq 0$  donc  $g(x) \in [0, +\infty[$  de plus  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$  donc  $f \circ g = h$  est continue sur  $[0, 1]$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f \circ g(x) = 0 = h(0)$  d'où  $h$  est continue à gauche en 1 et par suite  $h$  est continue sur  $[0, 1]$ .

**Exercice N° 6** 1)  $f(x) = \sqrt{3x+4}$ ,  $f$  est dérivable sur  $]-\frac{4}{3}, +\infty[$  et  $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ . Ainsi l'approximation

de  $f$  pour  $h$  proche de  $h$  est  $f(h) = f(0) + h f'(0) \Leftrightarrow f(h) = 2 + \frac{3}{4}h$ .

$$2) \sqrt{4.000048} = \sqrt{4 + 3 \times 0.000016} = 2 + \frac{3}{4} \times 0.000016 = 2.000012.$$

Pour  $\sqrt{4.000048}$ , la calculatrice affiche 2.00001199, l'approximation affine de  $\sqrt{4.000048}$  est une valeur approchée par excès de  $\sqrt{4.000048}$ .

**Exercice N° 7** 1)  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$  et  $f'(x) = \frac{-2}{(x+5)^2}$ ;  $f(-1+t) = f(-1) + f'(-1)t = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}t$ ;  $c$  est

l'approximation affine de  $f$  au voisinage de  $(-1)$ .

$$2) f(-1+t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}t; f'(-1) = -\frac{1}{4}; f'(-1)t = -\frac{1}{4}t. \text{ L'erreur commise}$$

$$\text{est } f(-1+t) - f(-1) - f'(-1)t = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{4}t = \frac{1}{2} - \frac{5}{8}t$$

**Exercice N° 8**,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , soit  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$  est définie continue sur  $[p, p+1]$ ,  $f$  est dérivable sur



1)  $p, p+1, \forall x \in ]p, p+1[, f'(x) = \frac{-3}{x^4}$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel  $c$  de

$$]p, p+1[ \text{ tel que } f(p+1) - f(p) = (p+1 - p)f'(c) = f'(c) = \frac{-3}{c^4} = \frac{-3}{p^3} + \frac{1}{p^3} = \frac{3}{p^3}.$$

$$2) \text{ On a } p < c < p+1 \Rightarrow \frac{1}{p+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{3}{(p+1)^4} < \frac{3}{c^4} < \frac{3}{p^4} \Rightarrow \frac{3}{(p+1)^4} < \frac{1}{p^3} - \frac{1}{(p+1)^3} < \frac{3}{p^4}.$$

**Exercice N°9** 1)  $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}x\right) \forall x \in [0, 1]$  ;  $f$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et on a

$$f'(x) = \frac{\pi}{3} \left( 1 + \tan^2 \frac{\pi}{3}x \right) = \frac{\pi}{3 \cos^2 \frac{\pi}{3}x}.$$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{3}x \leq \frac{\pi}{3}$  et comme  $x \mapsto \cos x$  est décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ , alors

$$\frac{1}{2} \leq \cos \frac{\pi}{3}x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \cos^2 \frac{\pi}{3}x \leq 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3 \cos^2 \frac{\pi}{3}x} \leq \frac{4\pi}{3}. \text{ Ainsi } \forall x \in [0, 1], \frac{\pi}{3} \leq f'(x) \leq \frac{4\pi}{3}.$$

2)  $h \in [0, 1] \Rightarrow [0, h] \subset [0, 1]$ ,  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $[0, h]$  et  $\forall x \in [0, h]$ , on a

$$\frac{\pi}{3} \leq f'(x) \leq \frac{4\pi}{3}. \text{ Pour } h \neq 0 \text{ et d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \leq \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \frac{f(h)}{h} \leq \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \tan\left(\frac{\pi}{3}h\right) \leq \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \tan\left(\frac{\pi}{3}h\right) \leq \frac{4\pi}{3}.$$

Ainsi  $\forall h \in [0, 1]$ , on a  $\frac{\pi}{3} \leq \tan\left(\frac{\pi}{3}h\right) \leq \frac{4\pi}{3}$ .

**Exercice N°10** 1) a)  $g'(x) = 3x^2 - 1 > 0 \forall x \in [1, +\infty[$

$$g(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x - 1) = +\infty.$$

b)  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  donc  $g([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$  ;  $0 \in [-1, +\infty[$  donc il existe un seul  $x \in [1, +\infty[$  tel que  $g(x) = 0$ . On a :  $g(1.3) = -0.103 < 0$  et  $g(1.4) = 0.344 > 0$  ;  $g(1.3) \times g(1.4) < 0$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $1.3 < \alpha < 1.4$ .

c) On a  $\alpha$  est une solution de  $g(x) = 0 \Rightarrow g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha}}.$$

2) a)  $x \mapsto \frac{x+1}{x}$  est dérivable et strictement positive sur  $[1, +\infty[$  donc  $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x}}$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  d'où  $f$

est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et on a :  $\forall x \in [1, +\infty[ \quad f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{x+1}}.$

b) Montrons que  $\forall x \in [1, +\infty[ : -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$ .

On a  $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \leq 0$  ; Montrons que  $\forall x \in [1, +\infty[ : f'(x) \geq -\frac{1}{2}$  ; montrons

$$\text{que } \forall x \in [1, +\infty[ : \text{if } f'(x) \leq \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \leq 1.$$

$$\frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \sqrt{\frac{x}{x^2(x+1)}} = \sqrt{\frac{1}{x^3(x+1)}}. \text{ On a } x \geq 1 \Rightarrow x+1 \geq 2 \text{ et } x^3 \geq 1 \text{ donc } x^3(x+1) \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x^3(x+1)} \leq \frac{1}{2}$$

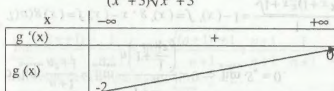
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x^3(x+1)}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \geq -\frac{1}{2} \text{ donc } \forall x \in [1, +\infty[ : -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$$

c) On a :  $-\frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2} \leq f(x) - \alpha \leq 0 - \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x - \alpha) \leq f(x) - f(\alpha) \leq 0(x - \alpha)$  (TAF)

$$\text{or } f(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \alpha \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2} \leq f(x) \leq \alpha \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \leq f(x) \leq \alpha.$$

**Exercice N°11** 1) a)  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$ ,  $g$  définie, continue et dérivable

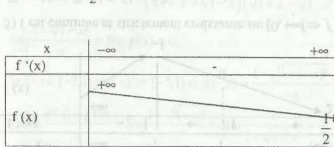
$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(x) = \frac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} > 0.$$



$$b) \forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } (-x) \in \mathbb{R} \text{ et } g(x) + g(-x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+3}} - 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1 = -2$$

$\Rightarrow I(0, -1)$  est un centre de symétrie de  $\zeta_g$ .

2) a)  $f'(x) = \frac{1}{2}g(x)$  or  $g(x) \in ]-2, 0[ \forall x \in \mathbb{R}$ , alors  $f'(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Donc  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .



b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ , alors  $\Delta : y = \frac{1}{2}$  est une asymptote à  $\zeta_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \frac{1}{2}$ , et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + \frac{1}{2})] = 0$  donc  $\Delta : y = -x + \frac{1}{2}$  est une asymptote oblique à  $\zeta_f$  au voisinage de  $-\infty$ .

3) a)  $U_0 \geq 0$ . Supposons que  $U_n \geq 0$  et montrons que  $U_{n+1} \geq 0$ .

On a  $U_{n+1} = f(U_n) \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right] \Rightarrow U_{n+1} \geq 0$ . **Conclusion** :  $U_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .

b)  $\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{1}{2}g(x)$  ; or si  $x \geq 0 \Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}g(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq \frac{1}{2}$ .

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a  $|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2}|a - b| \forall a, b \in \mathbb{R}^+$ .

c) On a :  $U_n \geq 0$  et  $1 \geq 0 \Rightarrow |f(U_n) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1| \Rightarrow |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$  ;  $|U_0 - 1| = 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$ , vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et montrons que  $|U_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ .

$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow |U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \forall n \in \mathbb{N} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1.$$

**Exercice N°12** 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi x) = \cos(0) = 1$  Or  $f(0) = 1$  alors  $f$  est

continue en 0.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \cos(\pi x) = \cos(-\pi) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{-x-1} - 1 = -1$

Or  $f(-1) = -1$ , alors  $f$  est continue en  $-1$ .

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1} = 1 \Rightarrow f'_x(0) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi x) - 1}{\pi x} \times \pi = 0 \times \pi = 0 \Rightarrow f'_x(0) = 0. \quad f'_x(0) \neq f'_x(0) \text{ donc } f$$

n'est pas dérivable en 0.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos(\pi x) - \cos(-\pi)}{x + 1} = u'(x)$  avec

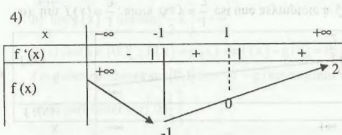
$$u(x) = \cos(\pi x) \Rightarrow u'(x) = -\pi \sin(\pi x) \Rightarrow f'_x(-1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{-x-1} - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{\sqrt{-x-1}} = -\infty, \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } (-1).$$

$$3) x \in ]0, +\infty[, f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0.$$

$$x \in ]-1, 0[, f(x) = \cos(\pi x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\pi \sin(\pi x) > 0 \text{ car } -\pi < \pi x < 0. \quad x \in ]-\infty, -1[, f(x) = \sqrt{-x-1} - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{-x-1}} < 0.$$



5)  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[ \Rightarrow f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [1, 2]$ .

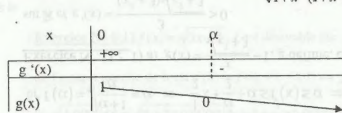
Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leq f(x) < 2$ .

$$6) a) S_n = \frac{1}{n^2+1} \sum_{k=0}^n \frac{k}{1+k^2} = \frac{1}{n^2+1} \sum_{k=0}^n (f(k) - 1) ; \text{ or } \forall k \in [0, 1, 2, \dots, n], k \geq 0 \Rightarrow 1 \leq f(k) \leq 2$$

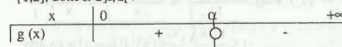
$$\Rightarrow 0 \leq f(k) - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^n (f(k) - 1) \leq n+1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n^2+1} \sum_{k=0}^n (f(k) - 1) \leq \frac{n+1}{n^2+1} \Rightarrow 0 \leq S_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0.$$

$$7) a) g(x) = f(x) - x, g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} - 1 \leq 0. \quad g(0) = f(0) - 0 = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$$



b)  $g$  est continue strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $g([0, +\infty[) = ]-\infty, 1]$ . Comme  $0 \in ]-\infty, 1]$ , alors l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}_+$ , et par suite l'équation  $f(x) = x$  admet  $\alpha$  comme seule solution dans  $\mathbb{R}_+$ .  $g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ ,  $g(2) = f(2) - 2 = \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 < 0$ , et comme  $g$  est continue sur  $[1, 2]$ , donc  $\alpha \in [1, 2]$ .



8) a) On a  $U_0 = 1 \Rightarrow 1 \leq U_n \leq \alpha$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $1 \leq U_n \leq \alpha$  et montrons que  $1 \leq U_{n+1} \leq \alpha$ . On a  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , alors  $f(1) \leq f(U_n) \leq f(\alpha) \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_{n+1} \leq \alpha$



(car  $f(\alpha) = \alpha$ ) et donc  $0 \leq U_n \leq \alpha$ .

Conclusion :  $1 \leq U_n \leq \alpha \forall n \in \mathbb{N}$ .

b)  $U_n \leq \alpha \Rightarrow g(U_n) \geq 0 \Rightarrow f(U_n) \geq U_n$ , et par suite  $U_{n+1} \geq U_n$ .

$U$  est croissante majorée par  $\alpha$ , donc elle est convergente.

$U_{n+1} = f(U_n)$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et en particulier en  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \Rightarrow f(l) = l = \alpha$ .

**Exercice N° 13 A) 1)**  $g$  dérivable

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0.$$

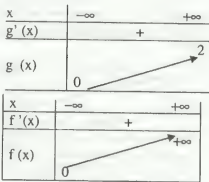
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 1 = 0. g \text{ admet } 0 \text{ comme minimum}$$

absolu sur  $\mathbb{R} \Rightarrow g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$2) f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 = g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} + x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$$

puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$



$$3) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0 \Rightarrow \Delta: y = 2x \text{ est une asymptote}$$

oblique à  $\zeta_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

$$f(x) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \text{ et par suite la}$$

courbe  $\zeta_f$  est située au-dessus de  $\Delta$ . b) voir figure

B) 1)  $f$  continue sur  $[x, x+1]$ ,  $f$  est dérivable sur  $]x, x+1[$

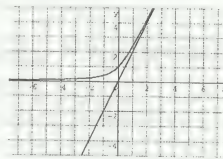
$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq f'(x) \leq g(x+1)$ , donc d'après

le théorème des accroissements

finis :  $(x+1-x)g(x) \leq f(x+1) - f(x) \leq (x+1-x)g(x+1) \Rightarrow g(x) \leq f(x+1) - f(x) \leq g(x+1) \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$2) a) U_0 = \frac{1}{0+1} \sum_{k=0}^0 g(k) = 1, U_1 = \frac{1}{1+1} \sum_{k=0}^1 g(k) = \frac{1}{2} [g(0) + g(1)] = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Soit  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow g(k) \leq f(k+1) - f(k) \leq g(k+1)$



$$g(0) \leq f(1) - f(0)$$

$$g(1) \leq f(2) - f(1)$$

$$g(n) \leq f(n+1) - f(n)$$

Si on somme membre à membre ces inégalités et après simplification, on obtient :  $U_n \leq \frac{f(n+1)-1}{n+1}$  (\*).

D'autre part, on a :

$$f(1) - f(0) \leq g(1)$$

$$f(2) - f(1) \leq g(2)$$

$$f(n) - f(n-1) \leq g(n)$$

On somme membre à membre ces inégalités et après simplification, on obtient :  $\frac{f(n)}{n+1} \leq U_n$  (\*\*). D'après

(\*) et (\*\*), on aura :  $\frac{f(n)}{n+1} \leq U_n \leq \frac{f(n+1)-1}{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} + \frac{n}{n+1} = 2$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n+1)-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}} + 1 - \frac{1}{n+1} = 2$ . Donc d'après le théorème des comparaisons  $\lim U_n = 2$ .

$$3) V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (g(k)-1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g(k) - \frac{n+1}{n+1} = U_n - 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1.$$

**Exercice N° 14 : A) 1)**  $D = \{x \in \mathbb{R}, 1+x \geq 0, 1-x \geq 0 \text{ et } \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \neq 0\} = [-1, 1]$

$$2) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g(x) = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} = \frac{2-2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}{2x} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

3) Si  $x \in [-1, 1] \Rightarrow (-x) \in [-1, 1]$  et  $g(-x) = \frac{1-\sqrt{1-(-x)^2}}{-x} = -g(x)$ . Donc  $g$  est impaire.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x-\sqrt{1-x^2}}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2-2x}{x(x-1)(1-x+\sqrt{1-x^2})} = +\infty.$$

$\Rightarrow g$  n'est pas dérivable à droite en 1.

$$5) \forall x \in D \setminus \{-1, 0, 1\}, g'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - (1-\sqrt{1-x^2}) = \frac{x^2}{x^2} - (1-\sqrt{1-x^2}) = 1 - (1-\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} > 0.$$



B) 1)  $f_1(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$  et comme  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f$  est continue en 0.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x-0} = g'(0) = \frac{1}{2} = f'_1(0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f'_1(0) = 0.$$

Et puisque  $f'_1(0) \neq f'_1(0)$  donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

$$3) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \sin x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \sin x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$C) U_n = \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{1}{k}\right) \quad a) h(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}, h'(x) = -\sin x \leq 0 \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. h(0) = 1 - \frac{2}{\pi}, h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$$

$h$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et comme  $h$  est

strictement décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

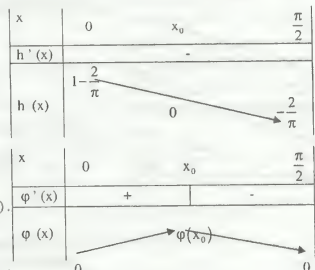
donc il existe  $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  unique tel que

$$h(x_0) = 0.$$

$$b) \varphi(x) = \sin x - \frac{2}{\pi} x \Rightarrow \varphi'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} = h(x).$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{\pi} x \leq \sin x.$$

$$c) \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \frac{1}{k} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{2}{\pi k} \leq \sin\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow$$



$$\frac{2}{\pi} \leq k \sin\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{2}{\pi} \leq \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \frac{2n}{\pi} \leq U_n \text{ et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{\pi} = +\infty, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

**Exercice N° 15 1) a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1} = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow f$  est continue en 0.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{x(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-2)\sqrt{x-2}} = -\frac{1}{0^-} = +\infty, \Rightarrow \zeta_f \text{ a une tangente verticale au point}$$

$A(0, 1)$ .

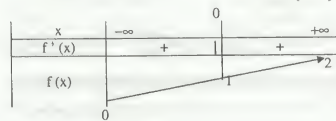
c) i)  $x \rightarrow \frac{x}{x-2}$  dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et  $\forall x \in ] -\infty, 0[$ ,  $\frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow x \mapsto \frac{x}{x-2}$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et par suite  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$ .

$x \mapsto x^2 + 2x$  est dérivable sur  $] 0, +\infty[$  et  $\forall x \in ] 0, +\infty[$ ,  $x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2+2x}$  est dérivable sur  $] 0, +\infty[$ .

D'autre part  $x \mapsto x+1$  est dérivable sur  $] 0, +\infty[$  et  $x+1 > 0 \Rightarrow f$  est dérivable sur  $] 0, +\infty[$ .

$$ii) f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2 \sqrt{x-2}} \quad \forall x \in ] -\infty, 0[ \text{ et } f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x}} \quad \forall x \in ] 0, +\infty[.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - 1 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1 + 1 = 2.$$



$$2) 2) a) \forall x \in [1, +\infty[, (x+1)^2 \geq 2^2 = 4 \text{ et } x^2 + 2x \geq 1 + 2 = 3 \Rightarrow (x+1)^2 \sqrt{x^2+2x} \geq 4\sqrt{3} \geq 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4} \forall x \in [1, +\infty[$$

$$b) \text{ Soit } g(x) = f(x) - x, g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow -1 \leq g'(x) \leq -\frac{3}{4} \forall x \in [1, +\infty[.$$

Ainsi  $g$  est continue strictement décroissante sur  $[1, +\infty[ \Rightarrow g([1, +\infty[) = ] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(1) ] = ] -\infty, g(1) ]$ .

Comme  $0 \in ] -\infty, g(1) ]$ , alors il existe un unique  $\alpha \in [1, +\infty[$  tel que  $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = x$  admet



une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1, +\infty[$ . On a  $g(1) = f(1) - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$  et  $g(2) = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1 < 0$ , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $\alpha \in ]1, 2[$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \zeta_f$  admet la droite  $y = 0$  comme asymptote au voisinage de  $-\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \approx 2 \Rightarrow \zeta_f$  admet la droite  $y = 2$  comme asymptote au voisinage de  $+\infty$ .

II) 1) a) Pour  $n = 0$ , on a  $U_0 = 1 \Rightarrow 1 \leq U_0 < \alpha$ , vrai pour  $n = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $1 \leq U_n < \alpha$  et montrons que  $1 \leq U_{n+1} < \alpha$ .

On a, d'après l'hypothèse de récurrence  $1 \leq U_n < \alpha$  et comme  $f$  est strictement croissante sur

$[1, +\infty[ \Rightarrow f(1) \leq f(U_n) < f(\alpha) \Rightarrow 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_{n+1} < \alpha$  et par suite  $1 \leq U_{n+1} < \alpha$ . Conclusion :

$1 \leq U_n < \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

b)  $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = g(U_n)$ ,  $g$  étant strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$  et comme  $U_n < \alpha \Rightarrow g(U_n) \leq g(U_{n+1}) \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$  et par suite  $U$  est croissante.

c)  $U$  croissante et majorée par  $\alpha$ , donc elle est convergente. Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $U_n \in [1, \alpha]$ , donc  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = f(l) \Rightarrow l = \alpha$ .

2) a)  $f$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et  $|f'(x)| \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in [1, +\infty[ \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{4}|b - a|$  pour tous réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $[1, +\infty[$ . Si on prend  $a = \alpha$  et  $b = U_n$ , puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [1, +\infty[$ , on aura :

$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha| \Leftrightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$  et comme  $U_n < \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , alors :  $0 < \alpha - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(\alpha - U_n)$ .

b) Pour  $n = 0$ , on a :  $U_0 = 1, 0 < \alpha - U_0 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0$ , vrai pour  $n = 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que

$0 < \alpha - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$  et montrons que  $0 < \alpha - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ . On a, d'après 2)a),  $0 < \alpha - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(\alpha - U_n)$ ,

ou on a  $0 < \alpha - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ , alors :  $0 < \frac{1}{4}(\alpha - U_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$  et par suite  $0 < \alpha - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ . Par le

principe de récurrence, on a :  $0 < \alpha - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$ .

3) a) On a, d'après 2)b),  $0 < \alpha - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < \sum_{k=1}^n (\alpha - U_k) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k$

$\Rightarrow 0 < n\alpha - \sum_{k=1}^n S_k \leq \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\alpha}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] \Rightarrow n\alpha - \frac{\alpha}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] \leq S_n < n\alpha$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha - \frac{\alpha}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] = +\infty$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ .

c)  $\alpha - \frac{\alpha}{3n} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \leq T_n < \alpha$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha - \frac{\alpha}{3n} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \alpha$ .

Exercice N° 16  $g$  est continue en  $\frac{1}{3} \Leftrightarrow f(1) = f(0)$  et dans ce cas  $g_x\left(\frac{1}{3}\right) = 3f'(1)$  et  $g_x\left(\frac{1}{3}\right) = 3f'(0)$ .

Par suite  $g$  est dérivable si et seulement si  $f(0) = f(1)$  et  $f'(0) = f'(1)$ .

Exercice N° 17 1)  $f(x) = (1+x)^n$ ,  $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ ,  $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$

2)  $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$

$\Rightarrow f'(x) = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1}$

$\Rightarrow f''(x) = 2C_n^2 + \dots + (n-1)(n-2)C_n^{n-1} x^{n-3} + n(n-1)C_n^n x^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k x^{k-2}$ .

3)  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \Rightarrow n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1}$  et  $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k x^{k-2}$ .

Si on remplace  $x$  par 1, on obtient :  $\sum_{k=1}^n C_n^k = 2^n$ ,  $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k$  et  $n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k$

$\sum_{k=1}^n k(k-1)C_n^k = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k - \sum_{k=1}^n kC_n^k \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = \sum_{k=1}^n k(k-1)C_n^k + \sum_{k=1}^n kC_n^k = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$

Exercice N° 18 Supposons que  $f$  est  $T$ -périodique (avec  $T > 0$ ), alors  $f(T) = f(0)$ . Comme  $f$  est continue sur  $[0, T]$ , dérivable sur  $]0, T[$  et  $f(T) = f(0)$ , alors d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel  $c$  de  $]0, T[$  tel que  $f'(c) = 0$  ce qui est impossible donc notre supposition est fautive et par suite  $f$  ne peut pas être périodique.

SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

Exercice N° 1 : a) 1) a), c), d); 2) a), c) B)  $C_{f^{-1}} = S_f(C_f)$  avec  $\Delta : y = x$  compléter la construction de  $C_{f^{-1}}$ .

Exercice N° 2 : 1) Vrai, 2) Vrai, 3) Vrai, 4) Vrai, 5) Vrai

Exercice 3 : 1)  $\zeta_f$  admet en  $B(1, 2)$  une demi tangente à droite verticale dirigée vers le haut alors,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$ ,  $\zeta_f$  admet en  $B(1, 2)$  une demi tangente à gauche portée par une droite de coefficient

directeur  $(-2)$  alors,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2$ .

2)  $\zeta_f$  admet en  $A(-1, 2)$  une tangente de coefficient directeur 2 alors,  $f'(-1) = 2$ .

1<sup>ère</sup> méthode : Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{f(x^2 - 1) - 2}{x^2 - 1 - (-1)} = \frac{f(x^2 - 1) - 2}{x^2} = \frac{f(x^2 - 1) - 2}{x^2 - 1 + 1} = \frac{f(x^2 - 1) - 2}{x^2 - 1 + 1} = \frac{f(x^2 - 1) - 2}{x^2}.$$

On pose  $X = x^2 - 1$  donc si  $x \rightarrow 0 \Rightarrow X \rightarrow -1$  et par suite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 - 1) - 2}{x^2 - 1 + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(X) - 2}{X + 1} = \lim_{X \rightarrow -1} \frac{f(X) - f(-1)}{X - (-1)} = f'(-1) = 2 \text{ et}$$

comme  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , il en résulte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 - 1) - 2}{x} = 2 \times 0 = 0$ .

2<sup>ème</sup> méthode : Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{f(x^2 - 1) - 2}{x} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$

avec  $\varphi : x \mapsto f(x^2 - 1)$ . On a :

$\varphi$  est dérivable en  $0$  car  $x \mapsto x^2 - 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u'(x) = 2x$  donc  $u$  est dérivable en  $0$  et  $u'(0) = 0$

$\varphi$  est dérivable en  $0$  car  $\varphi'(0) = f'(u(0)) \cdot u'(0) = f'(-1) = 2$  alors  $\varphi$  est dérivable en  $0$  et

$\varphi'(0) = f'(u(0)) \cdot u'(0) = 2 \times 0 = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 - 1) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(0) = 0$

3) a)  $g^{-1}(2) = -1$  car  $g(-1) = 2$ .  $g$  est dérivable en  $-1$  et  $g'(-1) = 2 \neq 0$  alors

$g^{-1}$  est dérivable en  $2$  et  $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(-1)} = \frac{1}{2}$ . b)  $\zeta_g$  et  $\zeta_{g^{-1}}$  sont symétriques par rapport à la droite

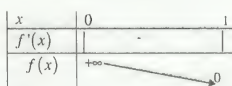
d'équation  $y = x$ .

Exercice N° 4 : 1) On a :  $\frac{1-x}{x} \geq 0$ ; si  $x \in ]0, 1[ \Rightarrow f$  définie, continue sur  $]0, 1[$  car  $x \mapsto \frac{1-x}{x}$  continue

sur  $]0, 1[$ ;  $x \mapsto \frac{1-x}{x}$  est dérivable,  $\forall x \in ]0, 1[$ ;  $\frac{1-x}{x} > 0 \Rightarrow f$  est dérivable sur  $]0, 1[$ .

$\frac{-x-1+x}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in ]0, 1[$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = -\infty$

donc  $f$  n'est pas dérivable à gauche en 1.  $C_f$  admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut à gauche de point  $A(1, 0)$



2) a)  $f$  continue, strictement décroissante sur  $]0, 1[$  donc elle réalise une bijection de  $]0, 1[$

sur  $f(]0, 1[) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [0, +\infty[$ .

b) On a  $C_f$  admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut en  $A(1, 0)$ . Par raison de symétrie par rapport à  $\Delta : y = x$ ,  $C_{f^{-1}}$  admet une demi tangente horizontale en  $B(0, 1)$ . Donc  $g = f^{-1}$  est dérivable à droite en 0 et  $g'_x(0) = 0$ .

2<sup>ème</sup> méthode :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{y - 1}{f(y) - f(1)} = \lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(y) - f(1)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

c)  $C_{f^{-1}} = S_{\Delta y=x}(C_f)$ . La droite  $x = 0$  est une asymptote verticale à  $C_f$  au voisinage de 0.

Donc la droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote horizontale à  $C_{f^{-1}}$  au voisinage de  $+\infty$ .

d)  $f^{-1}[0, +\infty[ \rightarrow ]0, 1[$ ;  $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{1-y} = x \Leftrightarrow \frac{1-y}{x^2} = x^2 \Leftrightarrow 1-y = x^2 y$

$\Leftrightarrow y(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$  donc  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Exercice 5 : 1) a)  $\forall x \in ]1, +\infty[$  on a  $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1} - (x-1)}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} - 1}{x - 1} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = g(1) = 2$  avec

$g(x) = x + 1$  fonction affine continue en 1. Interprétation graphique : la courbe de  $f$  au point d'abscisse 1 et à droite de 1 une demi tangente verticale dirigée vers le haut



c) La fonction  $x \mapsto x^2 - 1$  est une fonction polynôme strictement positive sur  $]1, +\infty[$  donc la fonction  $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ . La fonction  $x \mapsto -x + 1$  est une fonction affine donc dérivable sur  $]1, +\infty[$ , donc  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  comme somme de deux fonctions dérivables  $\forall x \in ]1, +\infty[$ , on

$$a: f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$2a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x = +\infty \text{ et par suite } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0 \quad \forall x \in ]1, +\infty[$$

$$\text{on a } f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}(x + \sqrt{x^2 - 1})} > 0$$

Or on a  $f$  est continue sur  $]1, +\infty[$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $]1, +\infty[$

c)  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $]1, +\infty[$  alors  $f$  réalise une bijection

de  $]1, +\infty[$  sur  $f(]1, +\infty[)$  or  $f$  est continue sur  $]1, +\infty[$

$$\text{alors } f(]1, +\infty[) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, 1[$$

3a) La courbe de  $f$  admet au point d'abscisse 1 et à droite en 1 une demi tangente verticale alors et par symétrie par rapport à la première bissectrice (D):  $y = x$  la courbe de  $f^{-1}$  admet à droite de  $f(1) = 0$  (car  $f$  est croissante) une demi tangente horizontale d'où  $f^{-1}$  est dérivable à droite en 0 et  $(f^{-1})'_+(0) = 0$

4a) TABLEAU DE VARIATION

$$4a) f(\sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5} \text{ et par suite } f^{-1}(3 - \sqrt{5}) = \sqrt{5}$$

$$b) f \text{ est dérivable en } \sqrt{5} \text{ et } f'(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5} - 2}{2} \neq 0$$

$$\text{donc } f^{-1} \text{ est dérivable en } f(\sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5} \text{ On a } (f^{-1})'(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{f'(\sqrt{5})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 2} = 2\sqrt{5} + 4$$

$$T: y = (f^{-1})'(3 - \sqrt{5})(x - 3 + \sqrt{5}) + f^{-1}(3 - \sqrt{5}) = (2\sqrt{5} + 4)(x - 3 + \sqrt{5}) - \sqrt{5} - 2$$

$$5a) \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in [0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in [1, +\infty[ \end{cases} \quad f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 1} - y + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 1} = y + x - 1 \Leftrightarrow y^2 - 1 = (y + x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 1 = y^2 + x^2 + 1 + 2xy - 2y - 2x \Leftrightarrow y = \frac{-x^2 + 2x - 2}{2(x - 1)} = f^{-1}(x) \quad b) f(x) = \frac{\sqrt{2} - x}{2} \Leftrightarrow x = f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2} - x}{2}\right) = \frac{5 - \sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}}$$

Exercice n°6: 1) a)  $b) f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $c$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $f(\mathbb{R}_+)$  et comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $f(\mathbb{R}_+) = ]\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(0)] = ]0, 1]$

c)	$\frac{x}{f(x)}$	0	$+\infty$
d)	$f(x)$	0	$+\infty$
	$f(x)$	1	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x - 1} = -\infty$$

2) a)  $f$  est continue et dérivable sur  $[0, +\infty[$  donc pour tout

$x_0 \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$  on a:  $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [0, x_0] \\ f \text{ est dérivable sur } ]0, x_0[ \end{cases}$  alors, d'après

le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]0, x_0[$  tel que:  $f(x_0) - f(0) = (x_0 - 0)f'(c)$  et comme  $f(0) = 1$  donc  $f(x_0) = 1 + x_0 f'(c)$ .

$$b) \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} < x_0 < 1 \\ f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+ \end{cases} \text{ alors } f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < f(x_0) < f(1) \Rightarrow f(1) - 1 < f(x_0) - 1 < f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1$$

$$\begin{cases} 0 < -f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 < -f(x_0) + 1 < -f(1) + 1 \\ \text{alors } -f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 < -\left[\frac{f(x_0) - 1}{x_0}\right] < \frac{2(-f(1) + 1)}{\sqrt{3}} \text{ donc} \end{cases}$$

$$\frac{2(f(1) - 1)}{\sqrt{3}} < f'(c) < f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{3}} < f'(c) < \frac{2\sqrt{7} - 7}{7} \Rightarrow -0,34 < f'(c) < -0,24$$

$$3) f^{-1}: ]0, 1[ \rightarrow [0, +\infty[; x \mapsto f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} = x \Leftrightarrow y^2 + 1 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$(\text{car } x \text{ et } y \text{ sont positifs}). \text{ Donc } f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Exercice N°7: 1)  $f$  est une fonction polynôme dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $[-1, +\infty[$  et positive donc  $f$  est strictement croissante sur  $[-1, +\infty[$ .  $f$  est continue strictement croissante sur  $[-1, +\infty[$  donc elle réalise une bijection de  $[-1, +\infty[$  sur  $f([-1, +\infty[) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty[ = \mathbb{R}_+$

$$2) \text{ On pose } g(x) = \sqrt[3]{x - 1} \quad \forall x \in [0, +\infty[; f \circ g(x) = (\sqrt[3]{x - 1})^3 + 3(\sqrt[3]{x - 1})^2 + 3(\sqrt[3]{x - 1}) + 1 = x$$

$$\forall x \in [0, +\infty[. \text{ Donc } f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt[3]{x - 1} \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

$$3) x \mapsto \sin x \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x > 0 \Rightarrow g: x \mapsto \sqrt{\sin x - 1} \text{ dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$g'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt{\sin^3 x}}$$

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-1	0

$$\text{Exercice N°8: 1-a) } g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \cos x < 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{2 - 2\pi}{\pi}$

b)  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $g$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur

$$\left[\frac{2 - 2\pi}{\pi}, +\infty\right[. c) f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sin x} - x = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x - x \sin x}{1 + \sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left( \frac{1 - x - \sin x}{1 + \sin x} \right) = 0. f(x) = x \Leftrightarrow \frac{xg(x)}{1 + \sin x} = 0 \Leftrightarrow xg(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ car } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. g \text{ réalise une}$$

bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $\left[\frac{2 - 2\pi}{\pi}, +\infty\right[$ ,  $0 \in \left[\frac{2 - 2\pi}{\pi}, +\infty\right[$  donc il existe un unique  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$$

2)  $f$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f'(x) = \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^2} < 0$ .  $f$  est continue et strictement décroissante sur

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } f \text{ réalise une bijection de } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

$$3) f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}; \quad 1 + \sin x = \frac{1}{f(x)}; \quad \sin x = \frac{1 - f(x)}{f(x)}$$

$$a) x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]; f^{-1}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \sin(f^{-1}(x)) = \frac{1 - f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} = \frac{1 - x}{x}$$

$$\cos(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(f^{-1}(x))} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{2x - 1}}{x}$$

$$\sin\left(f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \text{ et } f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, \sin\left(f^{-1}(2 - \sqrt{2})\right) = \frac{1 - 2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et}$$

$$f^{-1}(2 - \sqrt{2}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } f^{-1}(2 - \sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$c) f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{1 + \cos x}; \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos x \leq 1; \quad 1 < 1 + \cos x \leq 2; \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \cos x} < 1$$

$$, f^{-1}\left(f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{1 + \cos x}\right) = \frac{\pi}{2} - x; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f^{-1}\left(\frac{1}{1 + \cos x}\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

Exercice N°9: 1) pour  $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$  on a  $0 \leq \tan x < 1 \Rightarrow 1 - \tan x > 0$  donc  $1 - \tan(x) \neq 0$  ainsi  $f$  est définie,

$$\text{contenue, dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ et } f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{(1 - \tan x)^2} > 0; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \tan x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1	$+\infty$

$f$  est continue, strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  donc  $f$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  sur

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = [1, +\infty[$$

2)  $f$  est dérivable, strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et  $f'$  ne s'annule pas sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  donc  $f^{-1} = g$  est

$$\text{dérivable sur } f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[f\left(0\right), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x)\right] = \left[1, +\infty\right[ \text{ et } \forall x \in [1, +\infty[; g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ on}$$



pose  $f^{-1}(x) = y$  donc  $f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1-\tan y} = x$  alors  $1 - \tan y = \frac{1}{x}$  d'où

$$\tan y = 1 - \frac{1}{x}, g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{(1 - \tan y)^2}{1 + \tan^2 y} = \frac{(1 - \frac{1}{x})^2}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + 1 - 2x}$$

3) a)  $h(x) = g\left(\frac{1 + \tan x}{2}\right) \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ .  $x \mapsto \frac{1 + \tan x}{2}$  est dérivable sur  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$   $\frac{1 + \tan x}{2} \geq 1$  car  $\forall x \geq \frac{\pi}{4}, \tan x \geq 1 \Rightarrow 1 + \tan x \geq 2; \frac{1 + \tan x}{2} \geq 1$ ;  $g$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  donc  $h$  est dérivable sur  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  et

$$h'(x) = g'\left(\frac{1 + \tan x}{2}\right) \left(\frac{1 + \tan x}{2}\right)' = \frac{1}{2\left(\frac{1 + \tan x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1 + \tan x}{2}\right) + 1} \cdot \frac{1 + \tan^2 x}{2} = 1$$

b)  $h'(x) = 1 \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  d'où  $h(x) = x + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ , or  $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + k$  et  $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{1 + \tan \frac{\pi}{4}}{2}\right) = g(1) = 0$  d'où  $\frac{\pi}{4} + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{\pi}{4}$  donc  $g(x) = x - \frac{\pi}{4} \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

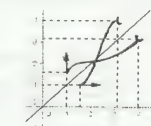
**Exercice 10: 1) a)**  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$   $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  On a  $f'(x) = -6 \cos x \sin x$ , signe

def'(x) : si  $x = \frac{\pi}{2}$   $\Rightarrow f'(x) = 0$  Si  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$   $\Rightarrow f'(x) > 0$  car  $\sin x > 0$  et  $\cos x < 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

b)  $f$  est strictement croissante sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  donc  $f$  réalise une bijection

de  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  sur  $f\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  et Puisque  $f$  est continue

sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  alors  $f\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)\right] = [1, 4[$



2) a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{f(x) - f(0)} = +\infty$  puisque  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  Car

pour  $x > \frac{\pi}{2}$ ,  $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  alors  $f^{-1}$  n'est pas dérivable à droite en 1

b)  $f$  est dérivable sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  et  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  donc  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] = [1, 4[$

c) Pour  $x \in [1, 4[$  on a  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-6 \cos y \sin y}$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in [1, 4[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \Leftrightarrow 1 + 3 \cos^2 y = x \Leftrightarrow \cos y = -\sqrt{\frac{x-1}{3}} \text{ puisque } \cos y < 0 \\ y \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

On a  $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Leftrightarrow \sin y = +\sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{\frac{4-x}{3}}$  puisque  $\sin y > 0$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-6 \cos y \sin y} = \frac{1}{6 \sqrt{\frac{x-1}{3}} \sqrt{\frac{4-x}{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{-x^2 + 5x - 4}}$$

d) Par la forme conique :  $\sqrt{-x^2 + 5x - 4} = \sqrt{-(x-5/2)^2 - 9/4} = \sqrt{-(x-5/2)^2 - 9/4}$  Par

encadrement dans l'intervalle  $\left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right]$  on a  $-\frac{3}{4} < x - \frac{5}{2} < \frac{3}{4}$  donc  $0 < \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$  D'où

$$\frac{3}{4} < \frac{3\sqrt{3}}{4} < \sqrt{-(x-5/2)^2 - 9/4} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{7}{4} \text{ et } f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{13}{4}$$

b) On pose  $g(x) = f^{-1}(x) - x$  par suite  $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ . La fonction  $g$  est continue sur  $\left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right]$

et  $g\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{13}{4} < 0$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation  $g(x) = 0$  admet au moins une

solution  $\alpha \in \left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right]$ . La fonction  $g$  est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables :

$g'(x) = (f^{-1})'(x) - 1 < 0$  car  $(f^{-1})'(x) < \frac{2}{3} < 1$  Donc  $g$  est strictement décroissante sur  $\left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right]$  alors  $\alpha$  est unique.

4) On a  $\forall x \in \left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right] \frac{1}{3} < (f^{-1})'(x) < \frac{2}{3}$ ,  $f^{-1}$  est continue sur  $[\alpha, x] \subset \left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right]$  et dérivable sur  $[\alpha, x]$  donc

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$$\frac{1}{3}(x - \alpha) < f^{-1}(x) - f^{-1}(\alpha) < \frac{2}{3}(x - \alpha) \text{ avec } f^{-1}(\alpha) = \alpha \forall x \in \left[\alpha, \frac{13}{4}\right] \text{ on a } \frac{1}{3}(x + 2\alpha) \leq f^{-1}(x) \leq \frac{2}{3}(2x + \alpha)$$

**Exercice n° 11: A) 1) a)**  $D_f = [-1, 1] \setminus \{0\}$ .  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$  Donc  $f$  est impaire.

b)

$$\text{Posons } \varphi(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, x < 1. \varphi(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(x-1)} = \frac{-(x+1)}{x\sqrt{1-x^2}} \text{ Donc}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi = -\infty$  alors  $f$  n'est dérivable à gauche en 1.  $\zeta$  admet au point

(1; 0) une demi tangente verticale d'équation :  $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$  c)

$D_e = ]0, 1[$ .  $f$  est continue sur  $]0, 1[$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(1) = 0$ .  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et  $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ .

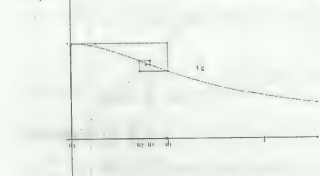
d) Voir figure.

2) a)  $f$  est bijective de  $]0, 1[$  vers  $]0, +\infty[$ .

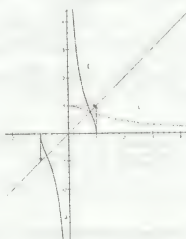
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in [0, +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in ]0, 1[ \end{cases} f(y) = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = x \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} = xy \Leftrightarrow 1 - y^2 = x^2 y^2 \Leftrightarrow y^2(1 + x^2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ car } y > 0 \text{ d'où } \forall x \geq 0, f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

B) 1)



a)



b) **Conjecture :** \*  $U$  n'est pas monotone. \*  $U$  est convergente.

2) Posons  $\varphi(x) = g(x) - x, x \geq 0$ .  $\varphi'(x) = g'(x) - 1 < 0$  donc  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , lors élargir à une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\varphi(\mathbb{R})$  et comme  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors  $\varphi(\mathbb{R}) = ]-\infty, 1]$  et puisque  $0 \in ]-\infty, 1]$  alors il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ , unique tel que :  $\varphi(\alpha) = 0$ .

$$\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha \begin{cases} \varphi(0) = 1 > 0 \\ \varphi(1) = g(1) - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < \alpha < 1$$

3) a) Démontrons par récurrence que :  $P_n : \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$ . Pour  $n=0$ ,  $0 \leq U_0 = 0 \leq 1$  d'où  $P_0$  est vraie.

Supposons que :  $0 \leq U_n \leq 1$  et montrons que  $0 \leq U_{n+1} \leq 1$ . On a :

$0 \leq U_n \leq 1$  et  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $\Rightarrow g(1) \leq g(U_n) \leq g(0)$  ou  $g(1) \geq 0$  et  $g(0) = 1$  donc  $0 \leq U_{n+1} \leq 1$ .

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$ . b)  $\begin{cases} g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ \forall x \in \mathbb{R}, |g'(x)| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$  donc, d'après les inégalités des

accroissements finis, pour tout  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ ,  $|g(b) - g(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$  et comme  $U_n \geq 0$  et  $\alpha \geq 0$  alors

pour  $a = \alpha$  et  $b = U_n$ , on obtient :  $|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$  ou  $g(U_n) = U_{n+1}$  et  $g(\alpha) = \alpha$  donc

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ . c) Démontrons par récurrence que :  $P_n : \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha$ . Pour  $n=0$ ,

$|U_0 - \alpha| = \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \alpha$  d'où  $P_0$  est vraie. Supposons que :  $P_n$  est vraie et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie. On a :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha \Rightarrow \frac{1}{2}|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha \text{ or } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha| \text{ donc } |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha \text{ d'où } P_{n+1} \text{ est}$$

vraie. **Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha$ .

d)  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha = 0 \Rightarrow U$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

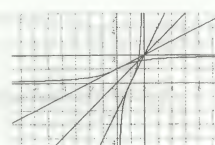
**Exercice N° 12: A)**  $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}} + 1 \forall x \in \mathbb{R}$  1)  $x \mapsto 1 + x^2$  est dérivable et strictement positive

sur  $\mathbb{R} \Rightarrow x \mapsto \sqrt{1+x^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de plus  $x \mapsto x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi  $f$  est dérivable

$$\text{sur } \mathbb{R}. \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1 + \sqrt{1+x^2})^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}$$

b)

$x$	$-\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0$





$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \left( -\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right)} + 1 = \frac{-1}{-\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left( \frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right)} + 1 = 2$$

2) a)  $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}; f(-x) + f(x) = \frac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}} + 1 + \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + 1 = 2$ . Donc le point  $f(0; 1)$  est un centre de symétrie de  $C$ . b)  $(T): y = f'(0)x + f(0)$   $(T): y = \frac{1}{2}x + 1$

c) On a:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  donc les droites d'équations  $y = 0$  et  $y = 2$  sont deux asymptotes à  $C$ .

3) a)  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $f(\mathbb{R}) = ]0, 2[$ . b) On pose  $f^{-1}(x) = y$  avec  $x \in ]0, 2[$  et  $y \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}} + 1 = x \Leftrightarrow \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}} = x-1 \Leftrightarrow \frac{y}{x-1} = 1+\sqrt{1+y^2} \text{ avec } (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x-1} - 1 = \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{(x-1)^2} + 1 = 1 + y^2 \Leftrightarrow y^2 \left( \frac{1}{(x-1)^2} - 1 \right) = \frac{2y}{x-1} \Leftrightarrow y^2 \left( \frac{1-(x-1)^2}{(x-1)^2} \right) = \frac{2y}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow y(1-x^2+2x-1) = 2(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{2(x-1)}{2x-x^2} \text{ de plus } f(0) = 1 \text{ donc } f^{-1}(1) = 0 \text{ et par suite}$$

$$\forall x \in ]0, 2[; f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{2x-x^2}. \text{ c) } C \text{ et } C' \text{ sont symétriques par rapport à la droite } \Delta: y = x.$$

B) 1) a)  $x \mapsto \tan x$  est continue sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  de plus  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $F$  est continue sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . b) Soit  $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[; F(x) = f(\tan x) = \frac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}} + 1 = \frac{\sin x}{1+\cos x} + 1$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} F(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 2 = F\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ donc } F \text{ est continue sur } \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

$$= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + 1 = \tan \frac{x}{2} + 1; \text{ pour } x = \frac{\pi}{2}; \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \\ 1 + \tan \frac{\pi}{4} = 2 \end{cases}$$

2) a)  $F$  est continue et dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; F'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) > 0$  Donc  $F$  est strictement croissante sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .  $F$  réalise une bijection de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $F\left[\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right] = [1; 2]$ .  $F$  admet alors une fonction réciproque  $F^{-1}$  définie sur  $[1; 2]$

b) On a:  $F$  est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], F'(x) \neq 0$  donc  $F^{-1}$  est dérivable sur  $[1; 2]$ ;

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], (F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))}. \text{ On pose } F^{-1}(x) = y \text{ avec } \begin{cases} x \in [1, 2] \\ y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(y)} = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{y}{2}}. \text{ Or } F^{-1}(x) = y \text{ Donc } F(y) = x$$

$$\forall x \in [1, 2]; (F^{-1})'(x) = \frac{2}{1 + (x-1)^2} = \frac{2}{x^2 - 2x + 2}. \text{ c) On pose } g(x) = F^{-1}(x) + F^{-1}\left(\frac{2}{x}\right); \text{ On a } x \rightarrow \frac{2}{x} \text{ est}$$

dérivable sur  $[1, 2]$  et  $\forall x \in [1, 2], \frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \frac{2}{x} \in [1, 2]$   $F^{-1}$  est dérivable sur  $[1, 2]$  donc

$$x \mapsto F^{-1}\left(\frac{2}{x}\right) \text{ est dérivable sur } [1, 2] \text{ et par suite } g \text{ est dérivable sur } [1, 2],$$

$$g'(x) = (F^{-1})'(x) - \frac{2}{x^2} (F^{-1})'\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{x^2 - 2x + 2} - \frac{2}{x^2} \times \frac{2}{\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 2 \times \frac{2}{x} + 2} = \frac{2}{x^2 - 2x + 2} - \frac{4}{x^2 \left( \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} + 2 \right)}$$

$$= \frac{2}{x^2 - 2x + 2} - \frac{4}{4 - 4x + 2x^2} = \frac{2}{x^2 - 2x + 2} - \frac{2}{x^2 - 2x + 2} = 0 \text{ Donc } g \text{ est constante sur } [1, 2],$$

$$g(x) = g(1) = F^{-1}(1) + F^{-1}(2) \text{ Or } F(0) = 1; F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ d'où } g(x) = \frac{\pi}{2} \forall x \in [1, 2].$$

3) a) On a:  $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} (n \in \mathbb{N}^*); n+k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}; n \leq n+k \leq 2n; \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n} + 1 \leq \frac{1}{n+k} + 1 \leq \frac{1}{n} + 1. \text{ On a } 1 \leq \frac{1}{2n} + 1 \text{ et } \frac{1}{n} + 1 \leq 2, \text{ or } F^{-1} \text{ est croissante sur } [1, 2]$$

$$\text{donc } F^{-1}\left(\frac{1}{2n} + 1\right) \leq F^{-1}\left(\frac{1}{n+k} + 1\right) \leq F^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right).$$

$$b) \sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{1}{2n} + 1\right) \leq \sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{1}{n+k} + 1\right) \leq \sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right), (n+1) F^{-1}\left(\frac{1}{2n} + 1\right) \leq U_n \leq (n+1) F^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{2n} + 1\right) \leq \frac{U_n}{n+1} \leq F^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right); \lim_{n \rightarrow +\infty} F^{-1}\left(\frac{1}{2n} + 1\right) = F^{-1}(1) = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} F^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right) = F^{-1}(1) = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n+1} = 0.$$

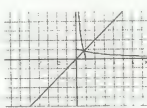
$$c) \frac{2}{\frac{1}{n+k} + 1} = \frac{2}{\frac{1}{1+n+k} + 1} = \frac{2(n+k)}{1+n+k}; F^{-1}\left(\frac{1}{n+k} + 1\right) + F^{-1}\left(\frac{2}{\frac{1}{n+k} + 1}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$F^{-1}\left(\frac{2}{\frac{1}{n+k} + 1}\right) = \frac{\pi}{2} - F^{-1}\left(\frac{1}{n+k} + 1\right); \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{2n+2k}{1+n+k}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\pi}{2} - F^{-1}\left(\frac{1}{n+k} + 1\right) \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{1}{n+k} + 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{1}{n+k} + 1\right); \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{2(n+k)}{1+n+k}\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \text{ Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice N° 13.1) a)  $f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x}{(x^2 + 2x + 2)^2} < 0 \forall x > 0$

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	1	



b) On pose  $g(x) = f(x) - x; g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \forall x \in \mathbb{R}_+$  (car  $f'(x)$  admet 1 comme maximum absolu sur  $[0; +\infty[$ )  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  donc elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $g(\mathbb{R}_+) = ]-\infty, 1]$ . Or  $0 \in ]-\infty, 1]$  donc il existe une unique réel  $\alpha \in [0; +\infty[$  tel que

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha; g\left(\frac{4}{5}\right) = 0.049; g(1) = -0.2; g\left(\frac{4}{5}\right) \times g(1) < 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]$$

c) 2) a)  $U_0 = \frac{45}{50}; U_0 \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]$ . Supposons que  $U_n \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]$  et montrons que  $U_{n+1} \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]$ . On a  $\frac{4}{5} < U_n < 1; f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  alors  $f\left(\frac{4}{5}\right) > f(U_n) > f(1) \Leftrightarrow \frac{4}{5} < U_{n+1} < 1$  enfin

d'après le principe de récurrence  $\frac{4}{5} < U_n < 1$ .

$$b) \left| f'(x) \right| - \frac{1}{4} = \frac{4(2x^2 + 4x) - (x^2 + 2x + 2)^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-(x+1)^2 - 3}{(x^2 + 2x + 2)^2} \leq 0. \text{ Donc } \left| f'(x) \right| \leq \frac{1}{4}$$

c)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+; \left| f'(x) \right| \leq \frac{1}{4}$ . D'après le théorème des accroissements finis,

$$\left| f(x) - f(\alpha) \right| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha|. \text{ Comme } U_n \in \mathbb{R}_+; \left| f(U_n) - \alpha \right| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha| \Leftrightarrow \left| U_{n+1} - \alpha \right| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$$

Pour  $n = 0; |U_0 - \alpha| = \left| \frac{45}{50} - \alpha \right|$  or  $\frac{4}{5} < \alpha < 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{4}{5}; \frac{4}{5} < U_0 < 1$  alors  $-\frac{1}{5} \leq U_0 - \alpha \leq \frac{1}{5}$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{5} < \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \Rightarrow |U_0 - \alpha| < \left(\frac{1}{4}\right)^0. \text{ Vrai pour } n = 0.$$

On suppose que  $|U_n - \alpha| < \left(\frac{1}{4}\right)^n \forall n \in \mathbb{N}^*$  montrons que  $|U_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ .

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \Leftrightarrow |U_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{4} |U_n - \alpha| \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ Donc d'après le principe de}$$

récurrence sur  $\mathbb{R}_+; |U_n - \alpha| < \left(\frac{1}{4}\right)^n; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{1}{4} < 1$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \alpha| = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - \alpha) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha.$$

3) a)  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  donc elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $f(\mathbb{R}_+) = ]0, 1]$ . b) Voir figure. c)  $f^{-1}: ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+; x \mapsto f^{-1}(x) = y$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{2(y+1)}{y^2 + 2y + 2} = x \Leftrightarrow 2y + 2 = xy^2 + 2yx + 2x$$

$$\Leftrightarrow xy^2 + y(2x - 2) + 2x - 2 = 0. \Delta = 4(1 - x^2) \geq 0 \forall x \in ]0, 1]. \text{ Donc } y = \frac{2 - 2x - 2\sqrt{1 - x^2}}{2x} \text{ ou}$$

$$y = \frac{2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2}}{2x}. \text{ Or } y \in [0; +\infty[; \frac{2 - 2x - 2\sqrt{1 - x^2}}{2x} = \frac{2x(x-1)}{x(1-x+\sqrt{1-x^2})} \text{ pour tout } x \in ]0, 1]. \text{ Donc}$$

Exercice N° 14.1) a) Pour  $-1 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1+x < 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} (1+x) < \pi$ , donc  $\frac{\pi}{2} (1+x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$f$  définie, continue et dérivable sur  $]-1, 1[$  et  $f'(x) = \frac{\pi}{2} (1 + \cot^2 \left( \frac{\pi}{2} (1-x) \right)) > 0 \forall x \in ]-1, 1[$

$x$	-1	1
$f'(x)$		
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

$f$  continue, strictement décroissante sur  $]-1, 1[$  donc  $f$  réalise une bijection de  $]-1, 1[$  sur

$$f(]-1, 1[) = \left[ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right] = \mathbb{R}.$$

b)  $f$  dérivable sur  $]-1, 1[$  et  $f'(x) \neq 0 \forall x \in ]-1, 1[$  Donc  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(]-1, 1[) = \mathbb{R}$  et

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \text{ On pose } (f^{-1}(x)) = y \text{ donc } f(y) = x$$



$$-1 + \cot \frac{\pi}{2}(y+1) = x \Leftrightarrow \cot \frac{\pi}{2}(y+1) = x+1$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\pi \left( 1 + \cot^2 \left( \frac{\pi}{2}(y+1) \right) \right)} = \frac{1}{\pi (1 + (x+1)^2)}$$

2)  $F(x) = f^{-1}(x-1) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ ;  $x \mapsto x-1$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $\mathbb{R}^+$  et pour tout

$x \in \mathbb{R}^+$ ,  $x-1 \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc  $F_1: x \mapsto f^{-1}(x-1)$  dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et

$F_1'(x) = 1 \times (f^{-1})'(x-1) = \frac{1}{\pi(1+(x-1)^2)}$ .  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\frac{1}{x} - 1 \in \mathbb{R}$  et

$f^{-1}$  dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc  $F_2: x \mapsto f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $F_2'(x) = -\frac{1}{x^2} \times (f^{-1})'\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\pi \left( 1 + \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^2 \right)} = -\frac{1}{\pi(x^2 + 1)}. \text{ Enfin } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^+ \text{ et}$$

$$F'(x) = -\frac{2}{\pi(1+x^2)} + \frac{2}{\pi(1+x^2)} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

b) pour  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $F(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $F(x) = c_1$  et  $\forall x \in ]-\infty, 0[$ ,  $F(x) = c_2$  avec  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes de  $\mathbb{R}$ .

•  $F(1) = f^{-1}(0) + f^{-1}(0) = 2f^{-1}(0)$ . On pose  $f^{-1}(0) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -1 + \cot\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) = 0$

•  $\Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) = 1$  Or  $0 < \frac{\pi}{2}(\alpha+1) < \pi$  donc  $\frac{\pi}{2}(\alpha+1) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$  c'est-à-dire

$$f^{-1}(0) = -\frac{1}{2}; F(1) = -1$$

•  $F(-1) = f^{-1}(-2) + f^{-1}(-2) = 2f^{-1}(-2)$ . On pose  $f^{-1}(-2) = \beta \Leftrightarrow f(\beta) = -2$

$\Leftrightarrow -1 + \cot\left(\frac{\pi}{2}(\beta+1)\right) = -2 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2}(\beta+1)\right) = -1$  Or  $0 < \frac{\pi}{2}(\beta+1) < \pi$  donc  $\frac{\pi}{2}(\beta+1) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$  c'est-à-dire

dire  $f^{-1}(-2) = \frac{1}{2}$  alors  $F(-1) = 1$ . Conclusion :  $F(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \\ 1 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \end{cases}$

3) a)  $f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{k} + \left(-\frac{1}{k}\right)\right) = f^{-1}(0) = -\frac{1}{2}$  car :  $\frac{1}{k} + 1 > 0$ .

b)  $U_n = \sum_{k=1}^n \left[ f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right) \right] = \sum_{k=1}^n f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^n f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)$  Or On a :  $f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$  alors

$$f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) = -1 - f^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) \text{ Donc } U_n = \sum_{k=1}^n \left[ -1 - f^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) + f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n -1 + \sum_{k=1}^n \left[ f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right) - f^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) \right]$$

$$= -n + f^{-1}(-1) - f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - f^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right) - f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right) = -n + f^{-1}(-1) - f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$$

On pose  $f^{-1}(-1) = z \Leftrightarrow -1 + \cot\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right) = -1 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right) = 0$  et  $0 < \frac{\pi}{2}(z+1) < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}(z+1) = \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow z+1=1 \Leftrightarrow z=0 \text{ d'où } f^{-1}(-1)=0 \text{ donc } U_n = -n + f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$W_n = \frac{1}{n} U_n = -1 + \frac{1}{n} f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right) = f^{-1}(0) = -\frac{1}{2}; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0 \text{ d'où}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = -1$  par suite  $(W_n)$  est convergente.

**Exercice N° 15: 1)** a) Pour  $-1 < x < 1 \Leftrightarrow -1 < -x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1-x < 2$  et  $0 < \frac{\pi}{4}(1-x) \leq \frac{\pi}{2}$  d'où

$\cot\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right) \geq 0$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ . Ainsi  $f$  est définie sur  $]-1, 1[$ .  $f$  est dérivable sur l'ensemble :

$D_f = \{x \in ]-1, 1[ \mid \text{tel que } \cot\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right) > 0\}$  Or pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\cot\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right) \geq 0$ . On élimine  $x$  de

$]-1, 1[$  tel que  $\cot\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right) = 0$ ;  $\cot\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(1-x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 1-x = 2+4k \Leftrightarrow x = -1-4k$  or

$x \in ]-1, 1[ \Leftrightarrow -1 \leq -1-4k < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k \leq 0$  donc  $k=0$  et par suite  $x=-1$ . Ainsi  $f$  est dérivable sur

$$]-1, 1[ \text{ et } f'(x) = \frac{\left(1 + \cot^2\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)\right) \frac{\pi}{4}}{3 \sqrt{\left(\cot\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)\right)^2}} = \frac{\pi \left(1 + \cot^2\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)\right)}{12 \sqrt{\left(\cot\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)\right)^2}} > 0.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)}}{x+1}$  se présente comme forme indéterminée.

On pose  $y = x+1$  et  $x = y-1$  lorsque  $x \rightarrow (-1)^+$ ,  $y \rightarrow 0^+$  donc

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}(1-y+1)\right)}}{y} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}}{y} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}}{y}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{y} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{y} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}} = \frac{\pi}{4} \times (+\infty) = +\infty \text{ enfin}$$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = +\infty$ .  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $(-1)$  et  $C_f$  admet une demi tangente verticale à

gauche au point  $A(-1; 0)$  dirigée vers le haut.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\pi}{4}(1-x) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \cot x = +\infty$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \cot\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)} = +\infty$

$f$  continue et strictement croissante sur  $]-1, 1[$  donc  $f$  réalise une bijection de

$$]-1, 1[ \text{ sur } f(]-1, 1[) = \left[ f(-1); \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right] = \left[ 0; +\infty \right).$$

**Exercice N° 16: 1)** On a :  $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  continue sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $[0, \pi]$ ;  $0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

,  $\sin\frac{x}{2} \geq 0$  donc  $x \mapsto \sqrt{\sin\frac{x}{2}}$  est continue sur  $[0, \pi]$ .  $x \mapsto \sin\frac{x}{2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier

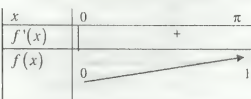
sur  $]0, \pi[$ ;  $\sin\frac{x}{2} > 0 \forall x \in ]0, \pi[$  car  $0 < \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$  donc  $x \mapsto \sqrt{\sin\frac{x}{2}}$  est dérivable sur  $]0, \pi[$  et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cos\frac{x}{2}}{2\sqrt{\sin\frac{x}{2}}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}, \forall x \in ]0, \pi[ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}$$

$= \frac{1}{2} \times (+\infty) = +\infty$  donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0. Conclusion:  $f$  est dérivable sur  $]0, \pi[$ .

$$f'(x) = \frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}; 0 < x \leq \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \text{ alors } \cos\frac{x}{2} \geq 0 \text{ et par suite } f'(x) \geq 0 \forall x \in ]0, \pi[$$

$x \mapsto \sin x$  est dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . Donc  $h$  est dérivable sur  $]-1, 1[$  et  $h'(x) = \cos(x) \times g'(x) \forall x \in ]-1, 1[$ .



$f$  est continue strictement croissante sur  $[0, \pi]$  donc  $f$  réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $f([0, \pi]) = J = [0, 1]$ .

3)  $f^{-1}(1) = \pi$ ,  $f^{-1}(0) = 0$ ,  $f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $\alpha \in [0, \pi]$   $\Leftrightarrow \sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et

$\frac{\alpha}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$  et  $\frac{\alpha}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  alors  $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}$  d'où  $\alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{3}$

4)  $f$  est dérivable sur  $]0, \pi[$  et  $f'(x) \neq 0 \forall x \in ]0, \pi[$ . Donc  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(]0, \pi[) = ]0, 1[$  et  $\forall x \in ]0, 1[$ ;  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

**Exercice N° 17: 1)** a)  $f'(x) = 2\sin 2x \geq 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  car  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x \leq \pi$  donc  $\sin 2x \geq 0$ .  $f$  est

continue et strictement croissante sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  donc elle réalise une bijection de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  sur

$f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0; 1]$ . b)  $f$  est strictement croissante et dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et

$f(x) \neq 0 \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow f^{-1}$  est dérivable sur  $f\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) = ]0, 1[$ .  $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ . On pose

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow -\cos 2y = x$  avec  $x \in ]-1, 1[$  et  $y \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .  $g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{2\sin 2y}$ . Or

$\sin^2 2y + \cos^2 2y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2y = 1 - \cos^2 2y$ .  $|\sin 2y| = \sqrt{1 - \cos^2 2y}$  or  $2y > 0$  pour tout  $y \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  donc

$\sin 2y = \sqrt{1 - \cos^2 2y} = \sqrt{1 - x^2}$ . Donc pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ;  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ . 2) a)  $g$  est dérivable sur

$]-1, 1[$ ; pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ;  $g(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . Pour  $x \in ]-1, 1[$ ;  $g(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ;  $\cos g(x) > 0$  et



On a  $\forall x \in ]-1;1[; g(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \geq 0$ . Donc  $h'(x) \geq 0 \forall x \in ]-1;1[$  et par suite  $h$  est strictement croissante sur  $]-1;1[$ ; donc  $h$  est strictement croissante sur  $[-1;1]$ .

b)  $h$  est continue strictement croissante sur  $[0;1]$ ; donc  $h([0;1]) = [h(0);h(1)] = [\sin g(0); \sin g(1)]$ . Soit  $g(0) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0$ . Or  $0 \leq 2\alpha \leq \pi \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ . Soit  $g(1) = \beta \Leftrightarrow f(\beta) = 1 \Leftrightarrow -\cos 2\beta = 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2\beta \leq \pi \Leftrightarrow 2\beta = \pi \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$ ;

$\sin g(0) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $\sin g(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ . Donc  $h([0;1]) = [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1]$ .

3) a) On a  $U_0 = 0$ ;  $0 \leq U_n \leq 1$ . On suppose que  $0 \leq U_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$  et on montre que  $0 \leq U_{n+1} \leq 1$ . D'après l'hypothèse de récurrence  $0 \leq U_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ ;  $h$  est croissante sur  $[0;1]$  donc  $h(0) \leq h(U_n) \leq h(1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_{n+1} \leq 1$ ;  $0 \leq U_{n+1} \leq 1$  car  $0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Enfin d'après le principe de récurrence  $0 \leq U_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$

b)  $h(x) = \sin g(x)$  avec  $g(x) \in [0; \frac{\pi}{2}] \forall x \in [-1;1]$  donc  $\sin g(x) \geq 0$ ;  $\sin g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 g(x)}$

$= \sqrt{1 - \frac{1 - \cos 2g(x)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 2g(x)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + f(f^{-1}(x))}{2}} = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \forall x \in [-1;1]$

c) Pour  $n = 0$ , On a  $U_0 = 0$  et  $\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Supposons que  $U_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$  et montrons que

$U_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$ ;  $U_{n+1} = h(U_n) = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(2(\frac{\pi}{2^{n+2}}))}{2}} = \sqrt{\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$

$= \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$  car  $0 < \frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{2^{n+2}} \geq 0$ . Donc d'après le principe de récurrence

$U_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = \cos 0 = 1$ .

**Exercice N° 18** 1) a)  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et on a

2)  $f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}} > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 - \frac{x\sqrt{x^2+3}}{x} = 4$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 - \frac{x\sqrt{x^2+3}}{x} = 5 - \frac{3}{0^+} = -\infty$ . On a  $f$  est continue et Strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  donc elle réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $]-\infty, 4[$

63

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Math

b)  $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$  où  $(x \in ]-\infty, -4[$  et  $y \in ]0, +\infty[ \Leftrightarrow 5 - \frac{\sqrt{y^2+3}}{y} = x$

$\Leftrightarrow 5y - \sqrt{y^2+3} = xy \Leftrightarrow \sqrt{y^2+3} = 5y - xy \Leftrightarrow \sqrt{y^2+3} = y(x-5)$  ( $y > 0$ ;  $x < 5 \Leftrightarrow 5-x > 0$ ) d'où

$y^2+3 = y^2(x-5)^2 \Leftrightarrow y^2+3 = y^2(25-10x+x^2) \Leftrightarrow y^2(x^2-10x+24) = 3$   $x^2-10x+24 = 0$ ;

$\Delta' = 25-24 = 1 \Leftrightarrow x' = 4$  et  $x'' = 6 \Rightarrow \forall x \in ]-\infty, 4[; x^2-10x+24 > 0$

d'où  $y^2 = \frac{3}{x^2-10x+24}$ ; Or  $y \in ]0, +\infty[ \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-10x+24}}$ , d'où  $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-10x+24}}$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 \Rightarrow \Delta_1: y = 4$  est une asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow (yy') : x = 0$  est une asymptote à  $C_f$ ;  $C_{f^{-1}} = S_{\Delta_1}(C_f)$ ;  $\Delta_1: y = x$ ;  $\Delta_1': x = 4$  est une asymptote à  $C_{f^{-1}}$  et  $(xx')$  est une asymptote à  $C_{f^{-1}}$ .

2) a)  $\forall x \in [1, +\infty[; f'(x) \leq \frac{3}{2}$ ;  $f'(x) = \frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$ ;  $f'(x) - \frac{3}{2} = \frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}} - \frac{3}{2} = \frac{3(2-x^2\sqrt{x^2+3})}{2x^2\sqrt{x^2+3}}$

$x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2+3 \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x^2\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow 2-x^2\sqrt{x^2+3} \leq 0$  d'où

$f'(x) - \frac{3}{2} \leq 0; \forall x \in [1, +\infty[$

b) (E):  $f(x) = 2x$ ;  $\varphi(x) = f(x) - 2x \Leftrightarrow \varphi'(x) = f'(x) - 2$  ou encore

$x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2+3 \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x^2\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) \leq \frac{3}{2}$

$x \in [1, +\infty[ \Rightarrow f'(x) \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow f'(x) - 2 \leq -\frac{1}{2} < 0$ . Donc  $\varphi$  est continue strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$  donc elle réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $\varphi([1, +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x); \varphi(1)]$ ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = -\infty$  et  $\varphi(1) = 1$  donc  $\varphi$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $]-\infty, 1]$ . Or

$0 \in ]-\infty, 1[ \Leftrightarrow 0$  admet un seul antécédent  $\alpha$  par  $\varphi$  dans  $[1, +\infty[$ . Or

$\varphi(1) = 1$ ;  $\varphi(2) = -0.32$ ;  $\varphi(1) \times \varphi(2) < 0 \Rightarrow \alpha \in ]1, 2[$  (théorème des valeurs intermédiaires) donc

$f(x) = 2x$  admet une seule solution  $\alpha \in ]1, 2[$ .

c) On a  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$

3) a)  $\begin{cases} 1 < u_0 < \alpha \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} f(u_n); n \in \mathbb{N} \end{cases}$  Vérifié. Supposons que  $1 < u_n < \alpha$  et montrons que  $1 < u_{n+1} < \alpha$

64

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Math

On a:  $1 < u_n < \alpha$ ;  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[ \Leftrightarrow f(1) < f(u_n) < f(\alpha) \Leftrightarrow 3 < f(u_n) < 2\alpha$

$\Leftrightarrow 1 < \frac{3}{2} < \frac{1}{2} f(u_n) < \alpha \Leftrightarrow 1 < u_{n+1} < \alpha$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}; 1 < u_n < \alpha$ .

b) On a  $u_n \in ]1, \alpha[$ ; Or  $\forall x \in ]1, \alpha[; \varphi(x) > 0 \Rightarrow f(u_n) - 2u_n > 0 \Leftrightarrow 2u_{n+1} - 2u_n > 0$  d'où  $(u_n)$  est croissante;  $(u_n)$  est majorée par  $\alpha$ . Donc  $(u_n)$  converge vers  $l \in ]1, \alpha[$  car  $1 < u_n < \alpha$  ou  $u_{n+1} = \frac{1}{2} f(u_n)$ ;  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[ \Rightarrow f$  est continue en  $l$  d'où  $1 = \frac{1}{2} f(l) \Leftrightarrow 2l = f(l) \Rightarrow l = \alpha$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

4)  $g(x) = f(\cos x) - 5 = \frac{-\cos^2 x + 3}{\cos x}$ ;  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  a)  $g(x) = f(\cos x) - 5$

$x \mapsto \cos x$  est dérivable et non nul sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ;  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ ;  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]; \cos x > 0$  donc

$x \mapsto f \circ \cos x$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  d'où  $g$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et

$g'(x) = -\sin x f'(\cos x) = \frac{-3 \sin x}{\cos^2 x \sqrt{\cos^2 x + 3}}$

b) On a  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]; \sin x > 0$ ; et  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]; g'(x) < 0$  donc  $g$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  donc

est une bijection de  $[0, \frac{\pi}{2}]$  sur  $g([0, \frac{\pi}{2}]) = [\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x); g(0)]$   $g(0) = f(\cos 0) - 5 = f(1) - 5 = -2$ ;

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\cos x) - 5 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) - 5 = -\infty$  Donc est une bijection de  $[0, \frac{\pi}{2}]$  sur  $]-\infty, -2]$ .

c) On a  $g'(x) = \frac{-3 \sin x}{\cos^2 x \sqrt{\cos^2 x + 3}}$ ;  $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x = 0$  est dérivable et  $g'(x) \neq 0$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  donc  $g^{-1}$  est dérivable sur  $g([0, \frac{\pi}{2}]) = ]-\infty, -2[$  et on a  $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{\cos^2 y \sqrt{\cos^2 y + 3}}{-3 \sin y}$

$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y) \Leftrightarrow x = f(\cos y) - 5 \Leftrightarrow f(\cos y) = x + 5$

$\cos y = f^{-1}(x+5) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(x+5)^2 - 10(x+5) + 24}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 1}}$  et  $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} \Leftrightarrow y \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin y > 0$

65

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Math

$= \sqrt{1 - \frac{3}{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 1}$  d'où  $g^{-1}(x) = \frac{3}{x^2 - 1} \sqrt{\frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}} = \frac{-1}{x^2 - 1} \sqrt{\frac{3x^2}{x^2 - 4}} = \frac{\sqrt{3x^2}}{(1-x^2)\sqrt{x^2-4}}$

5)  $\begin{cases} h(x) = g^{-1}(x) & \text{si } x \in ]-\infty, -2[ \\ h(x) = \sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2, 0] \end{cases}$  a)  $h(-2) = g^{-1}(-2) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4-x^2} = 0 = g^{-1}(-2)$  donc  $g$  est continue en  $-2$ .

b)  $g^{-1}(-2) = 0 \Leftrightarrow g(0) = -2$ , on a  $g'(0) = 0 \Rightarrow C_g$  admet au point  $A(0, -2)$  une demi tangente parallèle à l'axe  $(xx')$  et  $C_g$  admet à gauche au point  $A(-2, 0)$  une demi tangente parallèle à l'axe  $(yy')$   $\Rightarrow g^{-1}$  n'est pas dérivable à gauche en  $-2$  et  $h$  n'est pas dérivable à gauche en  $-2$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{h(x) - h(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{4-x^2} - 0}{(x+2)\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$  et par suite  $h$  n'est pas dérivable à droite en  $-2$ .

c) si  $x \in ]-\infty, -2[; h(x) = g^{-1}(x)$  et  $g$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  donc  $g^{-1} = h$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$

si  $x \in [-2, 0]$  alors  $h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0 \Rightarrow h$  est strictement croissante sur  $[-2, 0]$

**Exercice N° 19** 1) Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$  on a  $-1 \leq \cos(x^2-1) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos(x^2-1) - 1 \leq 0$ ;

$\frac{-2}{x-1} \leq \frac{\cos(x^2-1)-1}{x-1} \leq 0$  car  $\frac{1}{x-1} > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x-1} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^2-1)-1}{x-1} = 0$  donc

$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^2-1)-1}{x-1} \leq 0$  donc  $0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^2-1)-1}{x-1} \leq 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^2-1)}{x-1} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1-x^2}{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

2)  $x \mapsto \cos(x^2-1) - 1$  continue sur  $]1, +\infty[$ ;  $x \mapsto \frac{1}{x-1}$  continue sur  $]1, +\infty[$  et  $x-1 \neq 0$ .

Donc  $f$  est continue sur  $]1, +\infty[$ ;  $x \mapsto \frac{1-x^2}{x}$  fonction rationnelle continue sur  $\mathbb{R}^*$  en particulier sur  $]0;1[$  et

$\frac{1-x^2}{x} \geq 0 \forall x \in ]0;1[$  donc  $f$  est continue sur  $]0;1[$ .

**Continuité en 1**:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x^2-1)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1-\cos(x^2-1)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1-\cos(x^2-1)}{x^2-1} \right) (x+1)$

66

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Math







- d)  $\left| U_n - \frac{4}{5} \right| < \frac{1}{10} \left( \frac{2}{5} \right)^n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{5} \right)^n = 0 \Rightarrow U_n$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{4}{5}$
- c) 1)  $x \in \left] 0; \frac{\pi}{4} \right[ ; \varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{\sin 2x} - 1} + \frac{2}{\sin 2x} - 2 + 1 - \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2x}$   
 $= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2x} + 1 - \frac{2}{\sin 2x} + \frac{2}{\sin 2x} - 2 + 1} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 2x}{\sin^2 2x}} + 1 = \sqrt{\cot^2 2x} + 1 = 1 + \cot 2x$  car  $\cot 2x \geq 0 \forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{4} \right[$ .
- 2)  $\varphi'(x) = -2(1 + \cot 2x)$  pour  $x \in \left] 0; \frac{\pi}{4} \right[ ; \varphi$  est continue strictement décroissante sur  $\left] 0; \frac{\pi}{4} \right[$  donc elle réalise une bijection de  $\left] 0; \frac{\pi}{4} \right[$  sur  $\varphi\left(\left] 0; \frac{\pi}{4} \right[\right) = \left] \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right); \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \right[ = \left] 1; +\infty \right[$
- 3)  $\varphi$  est dérivable et strictement décroissante sur  $\left] 0; \frac{\pi}{4} \right[$  et pour  $x \in \left] 0; \frac{\pi}{4} \right[ \varphi'(x) \neq 0$  donc  $\varphi^{-1}$  est dérivable sur  $\left] 1; +\infty \right[ ; (\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{1}{\varphi'(y)} ; y = \varphi^{-1}(x) \Leftrightarrow \varphi(y) = x$   
 $\Leftrightarrow 1 + \cot 2y = x \Leftrightarrow \cot 2y = x - 1, (\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{-2(1 + \cot^2 2y)} = \frac{1}{-2(1 + (x-1)^2)} \forall x \in \left] 1; +\infty \right[.$
- 4)  $\psi(x) = (\varphi^{-1})'(x) - (\varphi^{-1})'(2-x) = \frac{-1}{2(1 + (x-1)^2)} + \frac{1}{2(1 + (1-x)^2)} = 0$ .
- $\psi(x)$  est constante pour tout  $x \in \mathbb{R} ; \psi(x) = \psi(1) = 2\varphi^{-1}(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  car  $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ .
- 5) a) On a  $n \leq k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{2n} + 1 \leq \frac{1}{k} + 1 \leq \frac{1}{n} + 1$  et  $\frac{1}{2n} + 1 > 1$  et  $\varphi^{-1}$  est décroissante sur  $\left] 1; +\infty \right[$  donc  $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right) \geq \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k} + 1\right) \geq \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2n} + 1\right) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{2n} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k} + 1\right) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{2n} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k} + 1\right)$   
 $\left(\frac{2n+1-n}{n+1}\right) \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right) \geq V_n \geq \left(\frac{2n+1-n}{n+1}\right) \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right) \Leftrightarrow \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right) \geq V_n \geq \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right)$
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2n} + 1\right)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$ .
- c)  $\varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi^{-1}\left(2 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi^{-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right) ; W_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{2n} \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$   
 $= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi^{-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - V_n$  Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

- Exercice N° 21 :** 1) a)  $x \mapsto \tan^2 x$  continue sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$  en particulier sur  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  et  $\tan^2 x \geq 0$  pour tout  $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  donc  $f$  est continue sur  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[ ; x \mapsto \tan^2 x$  dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$  en particulier sur  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[ ; \tan^2 x > 0$  pour tout  $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  donc  $f$  est dérivable sur  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ .
- b)  $f'(x) = \frac{2(1 + \tan^2 x) \tan x}{3 \times \sqrt[3]{(\tan^2 x)^{3-1}}} = \frac{2(1 + \tan^2 x) \tan x}{3 \times \sqrt[3]{(\tan^2 x)^2}} = \frac{2(1 + \tan^2 x) \tan x}{3 \times \sqrt[3]{(\tan^2 x)} \sqrt[3]{(\tan^2 x)}} = \frac{2(1 + \tan^2 x)}{3 \times \sqrt[3]{(\tan^2 x)}}$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{\tan^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \sqrt[3]{\tan^2 x}}{x \sqrt[3]{\tan^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \sqrt[3]{\frac{1}{\tan^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \frac{1}{\sqrt[3]{\tan^2 x}} = 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty$   
donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0,  $C_f$  admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point A(0;0)
- 2) a)  $f'(x) = \frac{2(1 + \tan^2 x)}{3 \times \sqrt[3]{\tan^2 x}}$
- |         |   |                 |
|---------|---|-----------------|
| $x$     | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $f'(x)$ |   | +               |
| $f(x)$  | 0 | $+\infty$       |
- $f$  est continue et strictement croissante sur  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  donc  $f$  réalise une bijection de  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  sur  $\left] f\left(\frac{\pi}{2}\right); f(0) \right[ = \left] 0; +\infty \right[$ .
- b)  $C_f$  admet  $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$  comme asymptote.  $C_{f^{-1}} = S_{(0, \frac{\pi}{2})}(C_f)$   
 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[3]{\tan^2 \frac{\pi}{4}} = \sqrt[3]{1} = 1 ; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{\tan^2 \frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$
- c)  $2 > \sqrt[3]{3} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et  $f$  est strictement croissante sur  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  donc  $f^{-1}(2) > f^{-1}\left(\sqrt[3]{3}\right) \Leftrightarrow f^{-1}(2) \geq \frac{\pi}{3}$  Or  $\frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow f^{-1}(2) > 1$
- 3) a)  $f$  est dérivable et strictement croissante sur  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  et  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  donc  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\left] 0; +\infty \right[$  et  $\forall x \in \left] 0; +\infty \right[ ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$  on pose

- $f^{-1}(x) = y ; x \in \left] 0; +\infty \right[ ; y \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  donc  $f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{\tan^2 y} = x \Leftrightarrow \tan^2 y = x^3 \Leftrightarrow \tan y = \sqrt[3]{x^3} ;$   
 $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{3 \times \sqrt[3]{\tan^2 y}}{2(1 + \tan^2 y)} = \frac{3 \times \sqrt[3]{x^3}}{2(1 + x^3)} = \frac{3 \times \sqrt[3]{x^3}}{2(1 + x^3)} = \frac{3 \times \sqrt[3]{x^3}}{2(1 + x^3)}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = 0$  car  $C_{f^{-1}}$  admet une demi tangente à droite en 0.
- 2<sup>ème</sup> méthode :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{f'(y) - f'(0)} = \frac{1}{+\infty} = 0$  D'où  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\left] 0; +\infty \right[$ .

- II) 1)  $f^{-1}$  est définie sur  $\left] 0; +\infty \right[$ , donc  $x \mapsto \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$  est définie sur  $\left] 0; +\infty \right[ \setminus \{1\}$  ;  
 $H(1) = 0 \Rightarrow D_H = \left] 0; +\infty \right[$ .

- 2) a)  $f^{-1}$  est continue sur  $\left] 0; +\infty \right[$  donc  $x \mapsto \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$  est continue sur  $\left] 0; +\infty \right[ \setminus \{1\}$

- $\lim_{x \rightarrow 1} H(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1} = (f^{-1})'(1) = \frac{3}{4}$  car  $f^{-1}$  est dérivable en 1.  
 $\lim_{x \rightarrow 1} H(x) = \frac{3}{4}$  Or  $H(1) = 0$  d'où  $H$  est continue en 1 si et seulement si  $a = \frac{3}{4}$ .

Conclusion :  $H$  est continue sur  $\left] 0; +\infty \right[$  si et seulement si  $a = \frac{3}{4}$ .

**Exercice N° 22 :** On pose  $\alpha = \sqrt[3]{a} ; \beta = \sqrt[3]{b}$  alors  $\alpha^3 = a$  et  $\beta^3 = b$   
 $\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a^2 b}} + \sqrt[3]{b + \sqrt[3]{a b^2}} = \sqrt[3]{\alpha^3 + \alpha^2 \beta} + \sqrt[3]{\alpha \beta^3 + \beta^3} = \sqrt[3]{\alpha^2(\alpha + \beta)} + \sqrt[3]{\beta^2(\alpha + \beta)}$   
 $= \alpha \sqrt[3]{\alpha + \beta} + \beta \sqrt[3]{\alpha + \beta} = (\alpha + \beta) \sqrt[3]{\alpha + \beta} = \sqrt[3]{(\alpha + \beta)^3} = \sqrt[3]{\alpha^3 + \beta^3}$

**Exercice N° 23 :**  
 $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 = \sum_{k=0}^3 C_k^3 (\sqrt[3]{x})^{3-k} (\sqrt[3]{y})^k = (\sqrt[3]{x})^3 + \sum_{k=1}^3 C_k^3 (\sqrt[3]{x})^{3-k} (\sqrt[3]{y})^k + (\sqrt[3]{y})^3$   
 $= x + \sum_{k=1}^3 C_k^3 (\sqrt[3]{x})^{3-k} (\sqrt[3]{y})^k + y \geq x + y$   
d'où  $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 \geq x + y$  et comme  $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$  est une fonction croissante sur  $\left] 0; +\infty \right[$  donc  
 $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3} \geq \sqrt[3]{x + y} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \geq \sqrt[3]{x + y}$ .

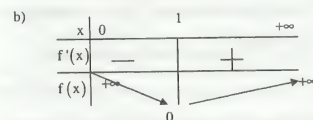
\*\*\*\*\*  
**SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE**  
 \*\*\*\*\*

- Exercice N° 1 :** 1) a) ; 2) c) ; 3) b) ; 4) c) ; 5) b) ; 6) b 7) i)  
 a) ii) b) iii) b)

**Exercice N° 2 :** 1) Vrai ; 2) Vrai ; 3) Faux ; 4) Faux

**Exercice N° 3 :** 1) a)  $f(1) = 0$  ;  $\Delta$  est la tangente à la courbe  $C$  au point d'abscisse 2 ; la tangente  $\Delta$  a pour coefficient directeur  $f'(2)$  qui est égale à sa pente.

A(1;-3) et B(2;3) sont deux points de  $\Delta ; f'(2) = \frac{-3-3}{1-2} = 6$



2) On a :  $f(1) = 0$  ; Donc si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  alors  $F'(1) = f(1) = 0$  ; la courbe  $\xi_f$  de la fonction  $F$  admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ; Or la courbe 3 est la seule qui admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 et par suite la courbe 3 est celle de la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice N° 4 :** Supposons que  $\Gamma$  est la courbe de  $f$  et  $\zeta$  la courbe de  $F$ . on a  $\Gamma$  est au dessus de  $\Delta : y = 0$  alors  $f(x) \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$  et par suite  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  car  $F'(x) = f(x)$  ceci est impossible car d'après  $\zeta ; F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , et décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Conclusion ;  $\zeta$  est la courbe de  $f$  et  $\Gamma$  est celle de  $F$ .

**Exercice N° 5 :** 1)  $f$  est une fonction polynôme sur  $\mathbb{R}$  donc  $f_1$  est continue et par suite elle admet au moins une primitive  $F_1$  sur  $\mathbb{R}$ .  $f_1(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

2)  $f_2(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$  ;  $f_2$  une fonction rationnelle continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  donc  $f_2$  admet au moins une primitive  $F_2$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ . On pose  $U(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow U'(x) = 2x$  ;  $f_2$  sous la forme :

$$\frac{1}{2} \frac{U'}{U} \Rightarrow F_2(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{U(x)} + k = \frac{-1}{2(x^2 - 1)} + k ; k \in \mathbb{R}$$

3)  $f_3(x) = (3x - 1)^5$  ;  $f_3$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $f_3$  admet au moins une primitive  $F_3$  sur  $\mathbb{R}$ .

On pose  $U(x) = 3x - 1 \Leftrightarrow U'(x) = 3 ; f_3(x) = \frac{1}{3} U'(x) (U(x))^5 ; F_3(x) = \frac{1}{18} (U(x))^6 + k$   
 $= \frac{1}{18} (3x - 1)^6 + k ; k \in \mathbb{R}$



4)  $f_4(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ ,  $f_4$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}/\{-1\}$  donc  $f_4$  admet au moins une primitive  $F_4$  sur  $\mathbb{R}/\{-1\}$ .

On pose  $U(x) = x+1 \Leftrightarrow U'(x) = 1$ ;  $f_4(x) = 2(U(x))^{-3} = 2U'(x)(U(x))^{-3}$ ;  $F_4(x) = -(U(x))^{-2} + k$

5)  $f_5$  continue sur  $\mathbb{R}$ ;  $F_5$  une primitive de  $f_5$  continue sur  $\mathbb{R}$ .

$f_5(x) = x^2(1+x)^6$ . On a  $(1+x)^2 = x^2 + 2x + 1$  donc  $x^2 = (1+x)^2 - 2x - 1$ ;  $x^2 = (1+x)^2 - 2(x+1) + 1$  d'où  $f_5(x) = [(1+x)^2 - 2(x+1) + 1](1+x)^6 = (1+x)^8 - 2(1+x)^7 + (1+x)^6$ ;

$F_5(x) = \frac{1}{9}(1+x)^9 - \frac{2}{8}(1+x)^8 + \frac{1}{7}(1+x)^7 + k$ ;  $k \in \mathbb{R}$

6)  $f_6(x) = \frac{1}{3\sqrt{5x+4}}$ ;  $f_6$  est continue sur  $\left]-\frac{4}{5}; +\infty\right[$ ;  $F_6$  une primitive de  $f_6$  sur  $\left]-\frac{4}{5}; +\infty\right[$ . On pose

$U(x) = 5x+4$ ;  $U'(x) = 5$ ;  $f_6(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ ;  $F_6(x) = \frac{1}{15}(2\sqrt{U(x)}) + k = \frac{2}{15}\sqrt{5x+4} + k$ ;  $k \in \mathbb{R}$

7)  $f_7(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+8}} + 5x+1$ ;  $f_7$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ;  $F_7$  une primitive de  $f_7$  sur  $\mathbb{R}$ .

$f_7(x) = g(x) + h(x)$  avec  $g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+8}}$  et  $h(x) = 5x+1$ . On pose  $U(x) = x^2+8$ ;  $U'(x) = 2x$ .

$g(x) = 3 \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$ ;  $F_7(x) = 3\sqrt{x^2+8} + \frac{5}{2}x^2 + x + k$ ;  $k \in \mathbb{R}$

8)  $f_8(x) = \frac{x-5}{(x+1)^3}$ ;  $f_8$  est continue sur  $\mathbb{R}/\{-1\}$ ;  $F_8$  est une primitive de  $f_8$  sur  $\mathbb{R}/\{-1\}$ ;

$f_8(x) = \frac{x+1-6}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{6}{(x+1)^3} = (x+1)^{-2} - 6(x+1)^{-3}$ ;  $F_8(x) = -(x+1)^{-1} + 3(x+1)^{-2} + k$ ;  $k \in \mathbb{R}$

9)  $f_9(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$ ;  $f_9$  est continue sur  $\mathbb{R}/\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ;  $F_9$  est une primitive de  $f_9$  sur  $\mathbb{R}/\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ;

On pose  $U(x) = x$  et  $V(x) = \sin x$ ;  $f_9(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$ ;  $F_9(x) = \frac{U(x)}{V(x)} + k = \frac{x}{\sin x} + k$ ;  $k \in \mathbb{R}$

**Exercice N° 6 :** 1)  $f(x) = 3x+1-5x^{-3}$ ;  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ ;  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}x^{-2} + k$ ; Or

$F(1) = -2$ . Donc  $\frac{3}{2} + 1 + \frac{5}{2} + k = -2 \Leftrightarrow k = -7$  et par suite  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}x^{-2} - 7$

2)  $f(x) = \cos x \sin^3 x$ . On pose  $U(x) = \sin x$ ;  $U'(x) = \cos x$ ;  $f(x) = U'(x)(U(x))^3$  d'où  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ .  $F(x) = \frac{1}{n+1}(U(x))^{n+1} + k = \frac{1}{n+1}\sin^4 x + k$  Or  $F(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$ ;  $F(x) = \frac{1}{n+1}\sin^4 x + 1$

3)  $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ ; On pose  $U(x) = \frac{1}{x}$ ;  $U'(x) = -\frac{1}{x^2}$  et  $V(x) = \cos x$ ;  $V'(x) = -\sin x$ ;

$f(x) = U'(x)V'(U(x))$ ;  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]-\infty; 0[$ .  $F(x) = V \circ U(x) + k = \cos \frac{1}{x} + k$  Or

$F\left(-\frac{1}{\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow k = 1$ ;  $F(x) = \cos \frac{1}{x} + 1$

4)  $f(x) = \lg^2 x = (1 + \lg^2 x) - 1$ ;  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .  $F(x) = \lg x - x + k$  Or

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow k = 1 + \frac{\pi}{4}$ ;  $F(x) = \lg x - x + 1 + \frac{\pi}{4}$

5)  $f(x) = \tan^2 4x = \frac{1}{4}(4 \tan^2 4x) - 1$ ; On pose  $U(x) = \tan 4x$ ;  $U'(x) = 4(1 + \tan^2 4x)$ ;

$f(x) = \frac{1}{4}U'(x) - 1$ ;  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\left]-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right[$ .  $F(x) = \frac{1}{4}\tan 4x - x + k$ ;  $k \in \mathbb{R}$  Or  $F(0) = \pi$ ;

$\Leftrightarrow k = \pi$ ;  $F(x) = \frac{1}{4}\tan 4x - x$

**Exercice N° 7 :** 1) a)  $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ;  $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$

b)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$   $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ; On pose  $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  et  $h(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ ;  $G$  une primitive de  $g$

sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ;  $G(x) = \tan x$  et  $H$  une primitive de  $h$  sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ;  $H(x) = -\frac{1}{\cos x}$  d'où une primitive de la

fonction  $f$  est  $F$  définie par :  $F(x) = G(x) + H(x) = \tan x - \frac{1}{\cos x}$

2) a)  $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1 - \sin x} > 0 \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  donc  $F$  est strictement croissante sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

b) Supposons que  $F$  est périodique donc il existe un réel  $T > 0$  tel que  $F(x+T) = F(x)$  alors  $F$  n'est pas bijective ce qui est absurde car  $F$  est strictement croissante sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

**Exercice N° 8 :** 1) a)  $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{i4x} + 4e^{i2x}e^{-i2x} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{i2x}e^{-i2x} + e^{-i4x})$

$= \frac{1}{16}(e^{i4x} + e^{-i4x}) + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6 = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$  donc  $f(x) = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$

b)  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  donc elle admet au moins une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$

$F(x) = \frac{1}{4}\sin 4x + 2\sin 2x + 3x$

2)  $\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{i4x} - 4e^{i2x}e^{-i2x} + 6e^{i2x}e^{-i2x} - 4e^{i2x}e^{-i2x} + e^{-i4x})$   
 $= \frac{1}{16}(e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6 = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$  Donc  $g(x) = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$ ;  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  donc elle admet une primitive  $G$  sur  $\mathbb{R}$ .  $G(x) = \frac{1}{4}\sin 4x - 2\sin 2x + 3x$

3) a)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;  $f(x) + g(x) = 8(\cos^4 x + \sin^4 x) = 8[(\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2]$

$= 8[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x] = 8 - 16\cos^2 x \sin^2 x$

b)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;  $h(x) = \frac{1}{16}(8 - f(x) - g(x))$ ; donc une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  est

$H(x) = \frac{1}{16}(8x - F(x) - G(x)) = \frac{1}{16}\left(8x - \frac{1}{4}\sin 4x - 2\sin 2x - 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + 2\sin 2x - 3x\right)$   
 $= \frac{1}{16}\left(2x - \frac{1}{2}\sin 4x\right)$

**Exercice N° 9 :** 1) a)  $x \mapsto x+3$  fonction polynôme dérivable sur  $]-3; +\infty[$  et  $x+3 > 0 \forall x \in ]-3; +\infty[$  donc  $x \mapsto \sqrt{x+3}$  est dérivable sur  $]-3; +\infty[$  et par suite  $g$  est dérivable sur  $]-3; +\infty[$ ;

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{x+3}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3\sqrt{x+3}}{2}$

b)  $f$  est continue sur  $]-3; +\infty[$ ; donc  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $]-3; +\infty[$

$\forall x \in ]-3; +\infty[$ ;  $\sqrt{x+3} = \frac{2}{3}g'(x)$  alors  $F(x) = \frac{2}{3}g(x) = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}$  est une primitive de  $f$  sur  $]-3; +\infty[$ .

2) a)  $\forall x \in ]-3; +\infty[$ ;  $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{g(x) - g(-3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{(x+3)(\sqrt{x+3})}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \sqrt{x+3} = 0$  Donc  $g$  est dérivable à droite en  $-3$  et  $g'_d(-3) = 0$

3)  $g$  est dérivable à droite en 0 donc  $F = \frac{2}{3}g$  est dérivable à droite en  $-3$  et  $F'_d(-3) = \frac{2}{3}g'_d(-3) = 0 = f(-3)$  et comme On a  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]-3; +\infty[$  alors  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]-3; +\infty[$

**Exercice N° 10 :** 1) Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[-\alpha; \alpha]$ ; On pose  $g(x) = F(x) - F(-x)$   $g$  est dérivable sur  $[-\alpha; \alpha]$ ;  $g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x)$  or  $f$  est impair  $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$  donc  $g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$ ;  $c \in \mathbb{R}$ ;  $g(x) = g(0) = F(0) - F(-0) = 0 \Rightarrow F(x) = F(-x)$   $x \in [-\alpha; \alpha]$  alors  $-x \in [-\alpha; \alpha]$  donc  $F$  est paire.

2) a) On pose  $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$  avec  $F$  une primitive de  $f$  telle que  $F(0) = 0$ ;  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\varphi'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0$  car  $f$  est paire ( $f(-x) = f(x)$ ) donc  $\varphi(x) = \varphi(0) = F(0) + F(0) = 0$  car  $F(0) = 0$  et par suite  $F$  est impaire.

b) Faux; contre exemple;  $f(x) = x^2$ ;  $f$  est une fonction paire,  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$  est une primitive de  $f$  mais  $F$  n'est pas paire car  $F(-x) \neq F(x)$

**Exercice N° 11 :** 1)  $x \mapsto 3x^2 + 5$  est une fonction polynôme continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;  $3x^2 + 5 > 0$  donc  $x \mapsto \sqrt{3x^2 + 5}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  $x \mapsto 6x^2 + 5$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et par suite  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

2) Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ ; Posons  $F(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  avec  $a \neq 0$  et  $ax^2 + bx + c > 0$ ;

$F'(x) = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ;  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ ;  $F'(x) = f(x)$

$\begin{cases} a = 3 \\ \frac{b}{2} = 5 \\ a = 3 \\ b = 0 \end{cases}$  d'où  $x \mapsto \sqrt{P(x)}$  ne peut pas être une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $P(x)$  est un polynôme de second degré.

3)  $\varphi(x) = h(x)\sqrt{3x^2 + 5}$ ;  $\varphi'(x) = h'(x)\sqrt{3x^2 + 5} + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 5}}h(x) = \frac{h'(x)(3x^2 + 5) + 3xh(x)}{\sqrt{3x^2 + 5}}$

b)  $\varphi'(x) = f(x) \Rightarrow h'(x)(3x^2 + 5) + 3xh(x) = 6x^2 + 5$

$x \mapsto 6x^2 + 5$  est un polynôme de second degré. On pose  $h(x) = ax + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$

$\varphi'(x) = \frac{a(3x^2 + 5) + 3x(ax + b)}{\sqrt{3x^2 + 5}} = \frac{6ax^2 + 3bx + 5a}{\sqrt{3x^2 + 5}}$ ;  $\varphi$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$

$\varphi'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 6 \\ 3b = 0 \\ 5a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$  d'où  $h(x) = x$  et par suite la fonction  $\varphi$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$\varphi(x) = x\sqrt{3x^2 + 5}$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice N° 12 :** 1) a) On a :  $h : x \mapsto 2 \tan x$  est dérivable sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  et  $\tan x \in \mathbb{R}^+$   $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  et On a  $F$

est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  d'où  $g = F \circ h$  est dérivable sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  et  $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

$g'(x) = 2 \tan'(x) \times F'(2 \tan x) = 2(1 + \tan^2 x)f(2 \tan x) = \frac{1}{2}$



- b)  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :  $g'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}x + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$  or  $g(0) = F(2 \tan 0) = F(0) = 0$  et comme  $g(0) = \frac{1}{2} \times 0 + k \Rightarrow k = 0$  enfin  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :  $g(x) = \frac{1}{2}x$  On a  $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
- $$F(2\sqrt{3}) = F\left(2 \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$
- 2) a)  $\alpha: x \mapsto \frac{2}{x+1}$  et  $\beta: x \mapsto \frac{2x}{x+2}$  deux fonctions rationnelles définies sur  $\mathbb{R}_+$ , donc dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ , et  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\frac{2}{x+1} \in \mathbb{R}_+$  et  $\frac{2x}{x+2} \in \mathbb{R}_+$ , donc  $h = F \circ \alpha + F \circ \beta$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et
- $$\forall x \in \mathbb{R}_+ : h'(x) = \alpha'(x)F(\alpha(x)) + \beta'(x)F(\beta(x)) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times f\left(\frac{2}{x+1}\right) + \frac{4}{(x+2)^2} \times f\left(\frac{2x}{x+2}\right)$$
- $$= \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{x+1}\right)^2 + 4} + \frac{4}{(x+2)^2} \times \frac{1}{\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 + 4} = \frac{-2}{4 + 4(x+1)^2} + \frac{4}{4 + 4(x+1)^2} = 0$$
- b) On a  $\forall x \in \mathbb{R}_+$  :  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = c$  avec  $c \in \mathbb{R}$ . Or  $h(0) = F(2) + F(0) = F(2) + 0$
- $$= F(2) = F\left(2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} \text{ car } g(x) = \frac{x}{2} \text{ et par suite } \forall x \in \mathbb{R}_+ : h(x) = \frac{\pi}{8}$$
- $$F\left(\frac{2}{x+1}\right) + F\left(\frac{2x}{x+2}\right) = \frac{\pi}{8} \forall x \in \mathbb{R}_+ (*)$$
- On remplace  $x$  par  $3$  dans  $(*)$  ; on obtient :  $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\pi}{8}$
- Exercice 13 :** 1)  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  ;  $\forall x \in [-2, 2]$   
 $x \mapsto 4-x^2$  est continue et positive sur  $[-2, 2]$  donc  $f$  est continue sur  $[-2, 2]$  donc  $f$  admet des primitives sur  $[-2, 2]$
- 2) On a :  $\begin{cases} f \text{ dérivable sur } [-2, 2] \\ F(x) = f(x) = \sqrt{4-x^2} \\ F(0) = 0 \\ H(x) = F(x) + F(-x) ; \forall x \in [-2, 2] \end{cases}$
- a) \* On a  $x \mapsto F(x)$  est dérivable sur  $[-2, 2]$  On a :  $\begin{cases} x \mapsto -x \text{ est dérivable sur } [-2, 2] \\ F \text{ est dérivable sur } [-2, 2] \\ \forall x \in [-2, 2] : (-x) \in [-2, 2] \end{cases} \Rightarrow x \mapsto F(-x) \text{ est dérivable sur } [-2, 2]$
- Donc  $H$  est dérivable sur  $[-2, 2]$  \*  $H'(x) = F'(x) - F'(-x) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-x^2} = 0$
- \*  $H'(x) = 0 ; \forall x \in [-2, 2]$  d'où  $H$  est constante sur  $[-2, 2]$

- $H(0) = F(0) + F(0) = 0 \Rightarrow H(x) = 0 ; \forall x \in [-2, 2]$
- b) Si  $x \in [-2, 2]$  ;  $(-x) \in [-2, 2]$   $H(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)$  D'où  $F$  est impaire
- Exercice 14 :** 1) si  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(4-x) \in \mathbb{R}$
- $$f(4-x) = \frac{1}{(4-x)^2 - 4(4-x) + 5} = \frac{1}{x^2 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 5} = f(x) \text{ D'où } \Delta \text{ est un axe de symétrie de } (\zeta_f)$$
- 2) a)  $G(x) = F(4-x) + F(x) ; \forall x \in \mathbb{R}$
- $\begin{cases} x \mapsto 4-x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x \mapsto F(4-x) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \Rightarrow G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$
- On a :  $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, (4-x) \in \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$
- \*  $G'(x) = -F'(4-x) + F'(x) = -f(4-x) + f(x) = 0$  car  $f(4-x) = f(x)$
- \*  $G'(x) = 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$  d'où  $G$  est constante sur  $\mathbb{R}$   $G(2) = F(2) + F(2) = 0$  d'où  $G(x) = 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$
- b) Si  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(4-x) \in \mathbb{R}$
- $F(4-x) + F(x) = G(x) = 0$  d'où  $I(2, 0)$  est un centre de symétrie de  $(f)$
- 3) a)  $H(x) = F(2 + \tan x) ; \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\begin{cases} x \mapsto 2 + \tan x \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \\ F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow H \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- On a :  $\begin{cases} \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ : (2 + \tan x) \in \mathbb{R} \end{cases}$
- $$H'(x) = (1 + \tan^2 x)F'(2 + \tan x) = (1 + \tan^2 x)f(2 + \tan x) = \frac{1}{(2 + \tan x)^2 - 4(2 + \tan x) + 5}$$
- $$= \frac{1 + \tan^2 x}{4 + 4 \tan x + \tan^2 x - 8 - 4 \tan x + 5} = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1$$
- b)  $H'(x) = 1 ; \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow H(x) = x + c ; (c \in \mathbb{R}) ; H(0) = F(2 + \tan 0) = f(2) = 0$  d'où  $c = 0$
- D'où  $H(x) = x ; \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ ; F(1) = F(2 - 1) = F\left(2 + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = H\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$

\*\*\*\*\*  
 SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE  
 \*\*\*\*\*

- Exercice N°1** c) ; 2) a) ; 3) d) ; 4) c) ; 5) b) ; 6) c) ; 7) a, 8) b) ; 9) a) ; 10) c)
- Exercice N°2** 1) Vrai car  $0 < \sin \pi x < 1$  pour  $0 < x < 1 \Rightarrow 0 \leq x^b \sin \pi x \leq x^b$ ,  $x \mapsto x^b$  et  $x \mapsto x^a \sin \pi x$  sont continues sur  $[0, 1] \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ .
- 2) Vrai car  $\int_0^1 \sqrt[3]{t^2 + 4} dt \leq \int_0^1 \sqrt[3]{t^2 + 4} dt = \int_0^1 \sqrt[3]{t^2 + 4} dt$
- 3) Vrai car la fonction  $t \mapsto t^2 \sin t$  est continue et impaire sur  $[-\alpha, \alpha]$
- 4) Faux :  $\int_0^1 t dt = 0$  et  $t \mapsto t$  est une fonction non nulle.
- 5) Vrai car  $S_A\left(\frac{1}{2}\right) = \zeta_f$ ,  $S_A(x=c) = (y=f^{-1}(c)=a)$ ,  $S_A(x=d) = (y=f^{-1}(d)=b)$  et  $S_A(y=0) = (x=0)$  avec  $\Delta: y=x$ . Alors  $A$  est l'aire de la partie du plan limitée par  $\zeta_f$ , et les droites d'équations  $y=a$ ,  $y=b$  et  $x=0$  car  $S_A$  conserve les mesures d'aires.
- 6) Faux ; contre exemple  $\left(\int_0^1 t dt\right)\left(\int_0^1 t dt\right) = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  et  $\int_0^1 t \times t dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$
- 7) vrai
- Exercice N°3 :**  $A = \int_0^1 |x^2 - 2x| dx = \int_0^1 |x^2 - 2x| dx = \int_0^1 |x^2 - 2x| dx = \int_0^1 |x^2 - 2x| dx = \int_0^1 |x^2 - 2x| dx$
- $$= -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 = -\left(\frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$
- $B = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}} dx$ , on pose  $u(x) = 1 + 2x^3 \Rightarrow u'(x) = 6x^2$  donc  $B = \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{U'(t)}{U(t)} dt = \frac{1}{3} \left[\ln(U(t))\right]_0^1$
- $B = \frac{1}{6} \left[2\sqrt{1+2x^3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} (\sqrt{3} - 1)$
- $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(\pi x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$  ;  $(\forall a \in \mathbb{R}, \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2})$
- $D = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} t g^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [(tg^2 x + 1) - 1] dx = [tg x - x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}$

- $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ . On effectue un processus de
- linéarisation  $\Rightarrow E = \frac{-1}{32} \left[ \sin 6x - \frac{6}{4} \sin 4x + \frac{15}{2} \sin 2x - 10x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{32} (-10\pi) = \frac{5\pi}{16}$
- $F = \int_0^{\frac{\sqrt{e}}{2}} x \tan^2(x^2) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{e}}{2}} x (1 + \tan^2 x^2) - x dx = \left[ \frac{1}{2} \tan^2 x^2 - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\sqrt{e}}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{\pi}{2}$
- Exercice N°4** A : A l'aide d'une intégration par partie  $A = \int_0^1 \frac{h}{\sqrt{1+h}} dh = \left[ 2h\sqrt{1+h} \right]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{1+h} dh$
- $$= 6\sqrt{4} - 2 \left[ \frac{2}{3} (1+h)\sqrt{1+h} \right]_0^1 = 12 - \frac{4}{3} [4\sqrt{4} - 1] = 12 - \frac{28}{3} = \frac{8}{3}$$
- Posons  $u(\alpha) = \alpha^2 \Rightarrow u'(\alpha) = 2\alpha$ ,  $v'(\alpha) = \sin \alpha \Rightarrow v(\alpha) = -\cos \alpha$ .
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2 \sin \alpha d\alpha = [-\alpha \cos \alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \cos \alpha d\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \cos \alpha d\alpha$ .
- On pose  $u(\alpha) = \alpha \Rightarrow u'(\alpha) = 1$ ,  $v'(\alpha) = \cos \alpha \Rightarrow v(\alpha) = \sin \alpha$ .
- Donc  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \cos \alpha d\alpha = [\alpha \sin \alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2} - [-\cos \alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$ . Ainsi  $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2 \sin \alpha d\alpha = \pi - 2$ .
- Exercice N°5** 1)  $B + C = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}} dx = \int_0^1 \frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt{x^3+1}} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+1} dx = A$
- 2)  $A = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+1} dx$ , on pose  $u(x) = x^3+1 \Rightarrow u'(x) = 3x^2 \Rightarrow x^2 \sqrt{x^3+1} = \frac{1}{3} u'(x) \sqrt{u(x)}$
- donc  $A = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{u \sqrt{u}}{u} du = \frac{1}{9} \int_1^2 (\sqrt{u} + \sqrt{u^3}) du = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}$
- $B = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$ , on pose  $v(x) = x^3+1 \Rightarrow v'(x) = 3x^2 : \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{3} \frac{v'(x)}{\sqrt{v(x)}}$
- donc  $B = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{v(x)}} dv = \frac{2}{3} \left[ \sqrt{v(x)} \right]_1^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 1) = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}$ .  $C = A - B = \frac{-2\sqrt{2}}{9} + \frac{4}{9}$ .
- Exercice 6 :** 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$  (tangente horizontale)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  car  $\Delta: y = x - 2$  est une asymptote verticale à  $\zeta_f$  au voisinage de  $(+\infty)$ .
- 3) a)  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .
- b)  $\zeta_f = S_A(\zeta_f)$  ;  $\Delta: y = x$ .



c)  $f$  dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$  donc  $\zeta_y$  admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 alors par raison de symétrie par rapport à  $\Delta: y = x$   $\zeta_{y-1}$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $f(0) = 0$  donc  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en 0.

4) a) On a  $\zeta_y$  au dessous de  $\Delta: y = x + 2$  et  $\zeta_y$  au dessus de  $\Delta: y = x - 2$  donc  $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$

b)  $x \mapsto x - 2$  et  $x \mapsto f(x)$  et  $x \mapsto x + 2$  sont trois fonctions continues sur  $[0; \lambda] \forall \lambda \geq 0$

$$\int_0^\lambda x - 2 \, dx \leq \int_0^\lambda f(x) \, dx \leq \int_0^\lambda x + 2 \, dx \Rightarrow \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^\lambda \leq A_\lambda \leq \left[ \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^\lambda \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda \leq A_\lambda \leq \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda$$

$$c) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda = +\infty \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = +\infty$$

$$II) 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{\sqrt{4 + x^2}} = 1 \Rightarrow a = 1 \quad \text{On a : } \begin{cases} b = -2a \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$2) A_\lambda = \int_0^\lambda x - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x^2 + 4} \right]_0^\lambda = \frac{\lambda^2}{2} - 2\sqrt{\lambda^2 + 4} + 4$$

$$3) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2}{2} - 2\sqrt{\lambda^2 + 4} + 4 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lambda}{2} - 2\sqrt{1 + \frac{4}{\lambda^2}} \right) + 4 = +\infty$$

**Exercice N° 71) a)**  $\forall x \in [0; +\infty[; \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{f(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{f(x) - 1}{x}} = \frac{1}{0} = -\infty$

2)  $h$  est continue et strictement décroissante sur  $[0; 1]$  donc elle réalise une bijection de  $[0; 1]$  sur  $h([0; 1]) = [h(1); h(0)] = [\frac{1}{2}; 1] = K$

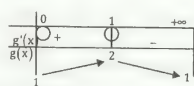
$$h([0; 1]) = [h(1); h(0)] = [\frac{1}{2}; 1] = K$$

$h$  est dérivable sur  $]0; 1[$  et  $\forall x \in ]0; 1[; h'(x) \neq 0$  donc  $h^{-1}$  est dérivable sur  $h([0; 1]) = [\frac{1}{2}; 1]$ ; la courbe  $\zeta_h$  de  $h$  admet au point d'abscisse 0 une demi tangente horizontale car  $h'(0) = 0$  donc par raison de symétrie par rapport à  $\Delta: y = x$ ;  $\zeta_{h^{-1}}$  admet une demi tangente verticale au point d'abscisse  $h(0) = \frac{1}{2}$  donc  $h^{-1}$  n'est pas dérivable à gauche en  $\frac{1}{2}$  de même on montre que  $h^{-1}$  n'est dérivable à droite en  $\frac{1}{2}$  et par suite  $h^{-1}$  est dérivable sur  $]\frac{1}{2}; 1[$

3) a)  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $f(x) \neq 0 \forall x \in ]0; +\infty[$

donc  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $g'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$

4) On a  $\forall x \in [0; 1]; g(x) \geq 0$  donc  $I$  est l'aire de la partie



du plan limitée par  $\zeta_y$  et les droites d'équations  $y = 0, x = 0$  et  $x = 1$ .

b)  $\forall x \in [0; 1]; 1 \leq g(x) \leq 2$  et  $x \mapsto g(x)$  et  $x \mapsto 1$  et  $x \mapsto 2$  trois fonctions continues sur  $[0; 1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 1 \, dx \leq \int_0^1 g(x) \, dx \leq \int_0^1 2 \, dx \Rightarrow [x]_0^1 \leq \int_0^1 g(x) \, dx \leq [2x]_0^1 \Rightarrow 1 \leq \int_0^1 g(x) \, dx \leq 2$$

$$c) 1 + J = \int_0^1 g(x) + xg'(x) \, dx = [xg(x)]_0^1 = g(1) = 2$$

d) On a :  $1 \leq 1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - J \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq -J \leq 0 \Rightarrow 0 \leq J \leq 1$

**Exercice 8 : 1)**  $I_0 = \int_0^1 (-\sqrt{1-x}) \, dx = \left[ -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$

2) a)  $\forall x \in [0; 1]$  on a  $x^{n+1} \leq x \Rightarrow x^{n+1} \leq x^n \sqrt{1-x}$  et comme  $x \rightarrow x^n \sqrt{1-x}$  et  $x \rightarrow x^{n+1} \sqrt{1-x}$  sont deux

fonctions continues sur  $[0; 1]$  donc  $\int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x} \, dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$  et par suite  $(I_n)$  est décroissante. Or  $0 \leq x^n \sqrt{1-x} \forall x \in [0; 1]$  donc  $0 \leq I_n \Rightarrow (I_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

b) On a :  $\forall x \in [0; 1]; -x \leq 0 \Rightarrow 1 - x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{1-x} \leq 1 \Rightarrow x^n \sqrt{1-x} \leq x^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx \Rightarrow I_n \leq \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad \text{on a } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

3) a)  $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x} \, dx$ . On pose  $U(x) = x^{n+1} \Leftrightarrow U'(x) = (n+1)x^n; V'(x) = \sqrt{1-x}$

$$\Rightarrow V(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}; I_{n+1} = \left[ -\frac{2}{3}(1-x)(\sqrt{1-x})x^{n+1} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 (n+1)x^n (1-x)\sqrt{1-x} \, dx$$

$$= \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx - \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}(n+1)I_n - \frac{2}{3}(n+1)I_{n+1}$$

$$\Rightarrow \left[ 1 + \frac{2}{3}(n+1) \right] I_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)I_n \Rightarrow (2n+5)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$$

$$b) 5I_1 = 2I_0 \Rightarrow I_1 = \frac{2}{5}I_0 = \frac{4}{15}$$

$$c) J = \int_0^1 (x^2 + 2x + 1)\sqrt{1-x} \, dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} \, dx + 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x} \, dx + \int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = I_2 + 2I_1 + I_0 = \frac{4}{7}I_1 + 2I_1 + I_0$$

**Exercice N° 9 :**

$$1) U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1; U_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{1}{2} \left[ t + \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$2) U_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt \text{ à l'aide d'une intégration par partie: soit}$$

$$u(x) = \cos^{n+1}(x) \Rightarrow u'(x) = -(n+1)\sin(x)\cos^n(x) \text{ et } v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x.$$

$$U_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^{n+1} x \, dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^n x \, dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^n x \, dx$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x \, dx = (n+1)U_n - (n+1)U_{n+2}$$

$$\Rightarrow (n+2)U_{n+2} = (n+1)U_n \Rightarrow U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour  $n = 0, U_2 = \frac{\pi}{4}$  et  $\frac{0+1}{0+2} U_0 = \frac{\pi}{4}$  signifie la relation est vraie pour  $n = 0$

$$\Rightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$$

3) Démonstration par récurrence.

Pour  $n = 0, U_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{(2 \times 0)! \pi}{(0!)^2 2^{2 \times 0 + 1}} = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

$$\text{Supposons que } U_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} \text{ et montrons que } U_{2n+2} = \frac{(2n+2)! \pi}{((n+1)!)^2 2^{2n+3}}.$$

$$\text{On a } U_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} U_{2n} \text{ (d'après 2)} \Rightarrow U_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} = \frac{(2n+1)! \pi}{2(n+1)! n! 2^{2n+1}} = \frac{(2n+1)! \pi}{(n+1)! n! 2^{2n+2}}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)! \pi}{(2n+2)(n+1)! n! 2^{2n+2}} = \frac{(2n+2)! \pi}{((n+1)!)^2 2^{2n+3}} \text{ Donc d'après le principe de récurrence, on a :}$$

$$U_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4) On pose  $t_n = (n+1)U_{n+1}U_n, t_{n+1} = (n+2)U_{n+2}U_{n+1}$

Or  $(n+1)U_n = U_{n+2}(n+2)$  (d'après 2) Donc  $t_{n+1} = (n+1)U_{n+1}U_n = t_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Donc la suite  $(t_n)$  est une suite

constante.  $\Rightarrow t_n = t_0 = U_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (n+1)U_{n+1}U_n = \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  donc  $t$  est indépendante de  $n$ .

$$5) \text{ Ainsi } (2n+1)U_{2n+1}U_{2n} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow U_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)U_{2n}} = \frac{\pi(n)!^2 2^{2n+1}}{2(2n+1)(2n)! \pi} = \frac{(n)!^2 2^{2n+1}}{(2n+1)! \pi}$$

**Exercice N° 10: 1) a)**  $f$  est dérivable sur  $\left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  car  $x \mapsto \sin x$  dérivable et  $\sin x \neq 0$  pour  $x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$ .

$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \geq 0$  pour  $x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$ .  $f$  est continue strictement croissante sur  $\left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  donc  $f$  réalise une

bijection de  $\left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  sur  $f\left( \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \right) = \left[ f\left( \frac{\pi}{2} \right), \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \right] = [1, +\infty[$ .

b)  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et  $f'(x) \neq 0$  pour  $x \in ]1, +\infty[$ , donc  $f^{-1}$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \text{ On pose } f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sin y} = x.$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos y}} = \cos y. \text{ Or } \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \text{ et } \cos y < 0 \text{ car } y \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \Rightarrow \cos y = -\sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

$$\Rightarrow \cos y = -\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{-\sqrt{x^2 - 1}}{x} \text{ et } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \text{ pour } x \in ]1, +\infty[; \text{ if } f^{-1}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$2) J = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} (f^{-1})'(x) \, dx = f^{-1}(\sqrt{3}) - f^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$f^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} \text{ et } f^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$$

**Exercice 11: 1)**  $F'(x) = f(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]1, +\infty[$ ; donc  $F$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

2)  $x \mapsto \sin x$  est dérivable sur  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  et  $\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[; \sin x \neq 0$  donc  $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$  est dérivable sur

$\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  et  $\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[; 0 < \sin x < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin x} > 1$  et comme  $F$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  donc  $G$  est dérivable

$$\text{sur } \left] 1; +\infty \right[ \text{ et } G'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} F'\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \left( \frac{-1}{\frac{1}{\sin x} \sqrt{\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 - 1}} \right) = \frac{-\cos x}{\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}} = 1$$

$$b) G'(x) = 1 \Rightarrow G(x) = x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ or } G\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}}\right) = F(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + k = 0$$

$$\Rightarrow k = -\frac{\pi}{4} \text{ et par suite } G(x) = x - \frac{\pi}{4}$$

$$c) I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \, dx = -[F(2) - F(\sqrt{2})] = -\left[G\left(\frac{\pi}{6}\right) - G\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{12}$$

**Exercice 12: 1) a)**  $x \mapsto (\tan x)^n$  est continue sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $U_n$  existe.



b)  $U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (\tan x - 1) \, dx$ . On a  $\tan^n x \geq 0 \, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  :  $h: x \mapsto \tan x$  est croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow (\tan x)^n (\tan x - 1) \leq 0$  pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$  et la suite  $U$  est décroissante.

$$2a) U_n + U_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) \, dx = \left[ \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + U_{n+2}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ . Or  $U$  est décroissante minorée par 0, donc  $U$  est convergente vers une limite  $L$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L \Rightarrow L + L = 0 \Rightarrow L = 0$ .

b) On a  $U$  est décroissante, donc  $U_n \geq U_{n+2} \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{n+1} - U_n \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$  ( $R_1$ )

On a  $U_n \geq 0 \Rightarrow U_{n+2} \geq 0$  et  $U_n + U_{n+2} \geq U_n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \geq U_n$  ( $R_2$ ). ( $R_1$ ) et ( $R_2$ ) donnent  $\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$3) a) \text{ On a d'après 1) } U_n = -U_{n+2} + \frac{1}{n+1} \text{ et } U_{n+2} = -U_{n+4} + \frac{1}{n+3}.$$

$$\text{Donc } U_n - U_{n+2} = -U_{n+2} + \frac{1}{n+1} + U_{n+4} - \frac{1}{n+3} \Rightarrow U_{n+4} = U_n + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1} \text{ (*)}.$$

b) On remplace  $n$  par  $4n-2$  dans (\*), on obtient :  $U_{4n-2} = U_{4n-4} + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n-1} \, \forall n \geq 1$ .

$$U_6 = U_2 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

$$U_{10} = U_6 + \frac{1}{9} - \frac{1}{7}$$

$$U_{4n+2} = U_{4n-2} + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n-1}$$

On somme membre à membre ces égalités et après simplification, on obtient :  $U_{4n+2} = U_2 - W_n$ .  
c) On a pour tout  $n \geq 1$ ,  $U_{4n+2} = U_2 - W_n$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = U_2$ .

$$\text{Or } U_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t g^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1+t g^2 x) - 1) \, dx = [t g x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 13.1 :** Soit  $x \in [0, 1]$ ,  $x^n - x^{n+1} = x^n(1-x) \geq 0 \Rightarrow x^n \geq x^{n+1}$  et comme  $(1+x)^2 > 0$ , alors on a :

$0 \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq \frac{x^n}{(1+x)}$ . Ces fonctions sont continues sur  $[0, 1]$ , donc :  $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \, dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)} \, dx$   
 $\Rightarrow 0 < I_{n+1} \leq I_n$ . Ainsi  $I$  est décroissante. D'autre part, on a  $I_n \geq 0 \Rightarrow I$  est minorée par 0 et par suite  $I$  est convergente.

2)  $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq (1+x)^2 \leq 4$  et  $x^n \geq 0 \Rightarrow \frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$ . Ce sont des fonctions continues sur  $[0, 1]$ ,

donc :  $\frac{1}{4} \int_0^1 x^n \, dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \, dx \Rightarrow \frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \left| I_n \right| \leq \frac{1}{n+1}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

$$3) a) I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} \, dx, \text{ on pose } u(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \text{ et } v'(x) = x^n \Rightarrow u'(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} \text{ et } v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

$$I_n = \left[ \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)^2} \right]_0^1 + \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \, dx = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \, dx \Rightarrow (n+1)I_n = \frac{1}{4} + 2 \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \, dx.$$

b)  $x \in [0, 1] \Rightarrow 1 \leq (x+1)^3 \leq 8$  et  $x^{n+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{8} \leq \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} \leq x^{n+1}$ . Ces fonctions sont continues sur  $[0, 1]$ ,

$$\text{donc : } \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{8} \, dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} \, dx \leq \int_0^1 x^{n+1} \, dx \Rightarrow \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^3} \, dx \leq 2 \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \, dx \leq \left[ \frac{2}{n+2} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+2)} \leq (n+1)I_n \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{n+2}.$$

$$c) \text{ On a } \frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+2)} \leq (n+1)I_n \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{n+2}, \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} + \frac{2}{n+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [(n+1)I_n - I_n] = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

$$4) a) I = \int_0^1 \frac{-(1+x)+1}{(x+1)^3} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2} \, dx = \left[ \frac{-1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right]_0^1 = \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{8}.$$

b)  $\sum_{k=1}^n (-1)^k x^k = \sum_{k=1}^n (-x)^k$  somme de  $n$  termes d'une suite géométrique de raison  $q = -x \neq 1$  et de 1<sup>er</sup> terme  $(-x)$ .

$$x) \Rightarrow \sum_{k=1}^n (-x)^k = -x \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} = \frac{-x}{1+x} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k I_k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{(1+x)^2} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \left( \sum_{k=1}^n (-1)^k x^k \right) \, dx \text{ (Somme finie) } =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \left[ \frac{-x}{1+x} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \right] \, dx = \int_0^1 \frac{-x}{(x+1)^3} \, dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \, dx. \text{ Ainsi : } S_n - I = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \, dx.$$

$$c) |S_n - I| = \left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \, dx \right| \text{ et comme } \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \geq 0 \, \forall x \in [0, 1], \text{ donc } |S_n - I| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \, dx.$$

$$x \in [0, 1] \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)} \Rightarrow |S_n - I| \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)} \, dx = I_{n+1}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - I) = 0 \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I = \frac{-1}{8}.$$

$$\text{Exercice 14.1) } F_{n+1} = \int_0^t \sqrt{4-t^2} \, dt.$$

$$\text{On pose } u(t) = t^{2n+2} \Rightarrow u'(t) = (2n+2)t^{2n+1}, v'(t) = \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \Rightarrow v(t) = -\sqrt{4-t^2}.$$

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x t^{2n+2} \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \, dt = \left[ -t^{2n+2} \sqrt{4-t^2} \right]_0^x + 2(n+1) \int_0^x t^{2n+1} \sqrt{4-t^2} \, dt =$$

$$-x^{2n+2} \sqrt{4-x^2} + 2(n+1) \int_0^x t^{2n+1} \sqrt{4-t^2} \, dt \text{ (*)}.$$

$$2) \text{ Pour } n=0, \text{ on a : } F_0(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \, dt = \left[ -\sqrt{4-t^2} \right]_0^x = -\sqrt{4-x^2} + 2.$$

$\lim_{x \rightarrow 2} F_0(x) = -\sqrt{4-2^2} + 2 = 2, L_0 = 2$  et  $2 \frac{16^0 (0)!^2}{1!} = 2$ . Donc la relation est vraie pour  $n=0$ . Supposons que :

$$\lim_{x \rightarrow 2} F_n(x) = L_n = 2 \times \frac{16^n (n)!^2}{(2n+1)!} \text{ et montrons que } \lim_{x \rightarrow 2} F_{n+1}(x) = L_{n+1} = 2 \times \frac{16^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+3)!}.$$

$$\int_0^x t^{2n+1} \sqrt{4-t^2} \, dt = \int_0^x \frac{t^{2n+1} (4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}} \, dt = 4 \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}} \, dt - \int_0^x \frac{t^{2n+3}}{\sqrt{4-t^2}} \, dt = 4F_n(x) - F_{n+1}(x).$$

$$\text{Donc d'après (*), } F_{n+1}(x) = -x^{2n+2} \sqrt{4-x^2} + 2(n+1)(4F_n(x) - F_{n+1}(x))$$

$$\Leftrightarrow (3+2n)F_{n+1}(x) = -x^{2n+2} \sqrt{4-x^2} + 8(n+1)F_n(x) \Leftrightarrow F_{n+1}(x) = \frac{-1}{3+2n} (x^{2n+2} \sqrt{4-x^2}) + \frac{8(n+1)}{3+2n} F_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} F_{n+1}(x) = \frac{8(n+1)}{3+2n} L_n \Leftrightarrow L_{n+1} = \frac{8(n+1)}{3+2n} L_n. \text{ Or d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$L_n = 2 \frac{16^n (n)!^2}{(2n+1)!} \Rightarrow L_{n+1} = \frac{8(n+1)}{3+2n} \times 2 \frac{16^n (n)!^2}{(2n+1)!} = \frac{16^{n+1} (n+1)!^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow L_{n+1} = 2 \times \frac{16^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+3)!}. \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow 2} F_n(x) = 2 \times \left( \frac{16^n (n)!^2}{(2n+1)!} \right) \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Exercice 15.1)**

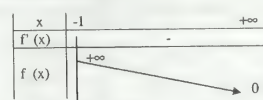
$$f'(x) = \frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2(x+2)}{(x+1)^6} = \frac{-2x-5}{(x+1)^4} < 0 \, \forall x > -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{(x+1)^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0.$$

( $x = -1$ ) est une asymptote verticale à  $\zeta_f$

et ( $y = 0$ ) est une asymptote horizontale à  $\zeta_f$  au voisinage de  $+\infty$ .



$$2) A(\lambda) = \int_0^1 |f(t)| \, dt = \int_0^1 f(t) \, dt = \int_0^1 \left( \frac{1}{(t+1)^3} + \frac{1}{(t+1)^3} \right) \, dt = \left[ \frac{1}{-2} (t+1)^{-2} + \frac{1}{-3} (t+1)^{-3} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} (1+1)^{-2} + \frac{1}{2} (1+1)^{-2} - \frac{1}{6} (1+1)^{-3} + \frac{1}{6} (1+1)^{-3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{6}.$$

3) a) Pour tout  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $\frac{k}{n}$  et  $\frac{k+1}{n}$  sont deux éléments de  $]-1, +\infty[$ ,  $f$  est décroissante sur

$$]-1, +\infty[, \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right). \text{ En intégrant entre } \frac{k}{n} \text{ et } \frac{k+1}{n},$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \, dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \, dt \Rightarrow \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, dt \leq \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ (*)}$$

b) D'après (\*),

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \Rightarrow \frac{1}{n} \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \leq \int_0^1 f(t) \, dt$$

$$\leq \frac{1}{n} \left[ f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \Rightarrow U_n + \frac{f(0)}{n} - \frac{f(0)}{n} \leq A(1) \leq U_n. \text{ Or } f(1) = \frac{3}{8} \text{ et } f(0) = 2,$$

$$\text{Donc } A(1) \leq U_n \leq A(1) + \frac{13}{8n}$$



$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) + \frac{13}{8n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = A(n) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{8}.$$

**Exercice 16 :**

$$1) a) 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^* \sqrt{1-x^2} \leq x^*$$

$$D'où  $0 \leq \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow 0 \leq U_n \leq \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$  donc  $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ .$$

$$b) \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$2) U_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} \sqrt{1-x^2} dx ; \text{ On pose } \begin{cases} u' = -2x \sqrt{1-x^2} \\ v = -\frac{x^{n+1}}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u = \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ v' = -\frac{(n+1)x^n}{2} \end{cases}$$

$$U_{n+2} = \left[ -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{-x^{n+1}}{2} - \int_0^1 \frac{2}{3} \cdot \frac{(n+1)x^n}{2} \cdot \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \right]$$

$$d'où  $U_{n+2} = \frac{(n+1)}{3} \int_0^1 x^n (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{(n+1)}{3} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} - x^{n+2} \sqrt{1-x^2} dx$$$

$$U_{n+2} = \frac{(n+1)}{3} (U_n - U_{n+2}) \text{ soit } U_{n+2} \frac{n+1}{3} U_n - \frac{n+1}{3} U_{n+2} d'où  $U_{n+2} + \frac{n+1}{3} U_{n+2} = \frac{n+1}{3} U_n$  ainsi$$

$$(n+4)U_{n+2} = (n+1)U_n \text{ Donc pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ On a : } U_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} U_n$$

$$3) \text{ Soit } g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$a) g \text{ est continue sur } [-1;1] ; 0 \in [-1;1] ; \cos t \in [-1;1] \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi(t) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$b) \text{ Soit } G \text{ une primitive de } g \text{ sur } [-1;1] \text{ alors pour tout } 0 \leq t \leq 1 \text{ on a : } \phi(t) = G(\cos t) - G(0)$$

$$\phi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ (comme somme et composée de fonctions dérivables)}$$

$$\phi'(t) = g(\cos t) \cdot (-\sin t) \Leftrightarrow \phi'(t) = -\sqrt{1-\cos^2 t} \sin t = -|\sin t| \sin t$$

$$c) t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] ; \phi(t) = -\sin^2 t \text{ or } \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \Rightarrow -\sin^2 t = \frac{\cos 2t - 1}{2} \Rightarrow \phi'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \text{ et par}$$

$$\text{suite } \phi(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C \text{ or } \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ donc } -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin(\pi) + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}. \text{ On a pour tout}$$

$$t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] ; \phi(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{\pi}{4} ; U_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \phi(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$4) a) (U_n) \text{ est une suite décroissante donc } U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq U_n \text{ et comme } U_n > 0 \text{ On a } \frac{U_{n+2}}{U_n} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \text{ soit}$$

$$\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$$

$$b) \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n+4} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{n \left( 1 + \frac{4}{n} \right)} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+2}}{U_n} = 1$$

$$c) U_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } U_1 = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[ \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} ;$$

$$U_0 U_1 = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2(0+1)(0+2)(0+3)}$$

$$\text{Supposons que } U_n U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ et montrons que } U_{n+1} U_{n+2} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

$$U_{n+1} U_{n+2} = U_{n+1} \frac{n+1}{n+4} U_n = \frac{n+1}{n+4} U_n U_{n+1} = \frac{n+1}{n+4} \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)} \text{ Donc}$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad U_n U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$d) U_n^2 \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\pi}{2n^3 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \left( 1 + \frac{3}{n} \right)} d'où  $n^3 U_n^2 = \frac{\pi}{2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \left( 1 + \frac{3}{n} \right)} \frac{U_{n+1}}{U_n}$  ;$$

$$n \sqrt{n} U_n = \sqrt{\frac{\pi}{2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \left( 1 + \frac{3}{n} \right)}} \frac{1}{U_n} \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt{n} U_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Exercice 17 : } 1) a) t \mapsto 4-t^2 \text{ est continue sur } [-2;2] \text{ et pour } t \in [-2;2], 4-t^2 \geq 0 \text{ donc } t \mapsto \sqrt{4-t^2} \text{ est}$$

$$\text{continue sur } [-2;2]. \text{ Comme } 0 \text{ et } 2 \sin x \in [-2;2], \text{ alors } F \text{ est bien définie sur } \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

$$F(0) = \int_0^0 \sqrt{4-t^2} dt = 0.$$

$$b) \text{ Posons } G(x) = \int_0^x \sqrt{4-t^2} dt \text{ et } u(x) = 2 \sin x. \text{ La fonction } u \text{ est dérivable sur } \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ et } u'(x) = 2 \cos x. \text{ La}$$

$$\text{fonction } t \mapsto \sqrt{4-t^2} \text{ est continue sur } [-2;2], \text{ alors } G \text{ est dérivable sur } [-2;2] \text{ et on a}$$

$$u' \left( \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) = [-2;2]. \text{ Donc } F = G \circ u \text{ est dérivable sur}$$

$$\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]. \text{ et } F'(x) = G'(u(x)) u'(x) = \sqrt{4-u^2(x)} \times u'(x) = 2 \cos x \sqrt{4-4 \sin^2 x} = 4 \cos^2 x.$$

$$c) F'(t) = 4 \cos^2 t \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} F'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \left( \frac{1+\cos 2t}{2} \right) dt = [2t + \sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi + \sin 2\pi.$$

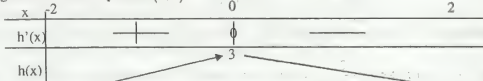
$$F(x) - F(0) = 2x + \sin 2x \text{ et donc } F(x) = 2x + \sin 2x.$$

$$2) (T) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 9 \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \sqrt{4-x^2} \text{ ou } y = -\frac{3}{2} \sqrt{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow M(x, y) \in \zeta_h \text{ ou } M(x, y) \in S_{(0,2)}(\zeta_h) \text{ avec } h(x) = \frac{3}{2} \sqrt{4-x^2} \quad C_h \text{ sa courbe}$$

$$\text{représentative. } h'(x) = \frac{-3}{2} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2-x}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty. \Rightarrow \zeta_h \text{ admet}$$

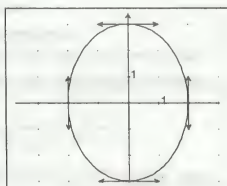
$$\text{une demi tangente verticale au point } A(2, 0).$$



$$b) \text{ Soit } D \text{ le domaine du plan limité par } \zeta_h, \text{ l'axe des abscisses et les droites } x=0 \text{ et } x=2. \text{ Donc } A = 4 \quad A(D) =$$

$$4 \int_0^2 h(t) dt = 4 \int_0^2 \frac{3}{2} \sqrt{4-t^2} dt = 6 \int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt =$$

$$6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-\cos^2 t} dt = 6F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (u a).$$



$$\text{Exercice 18 : } a) h : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ est une fonction continue sur}$$

$$\mathbb{R}_+ ; \text{ on pose } G \text{ une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R} \text{ Donc } f(x) = G(2x) - G(x). \text{ La fonction } x \mapsto 2x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ et } G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ donc } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R},$$

$$\text{et } f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2h(2x) - h(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+8x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$b) f'(x) = \frac{3-4x^2}{\sqrt{1+8x^2} \left( \sqrt{1+x^2} \right) \left( 2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+8x^2} \right)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3-4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Pour tout } x \in [0, \alpha], f'(x) \geq 0 \text{ donc } f \text{ est croissante sur}$$

$$[0, \alpha] \Rightarrow f(x) \leq f(\alpha). \text{ Pour tout } x \in [\alpha, +\infty], f'(x) \leq 0 \text{ donc } f \text{ est décroissante sur}$$

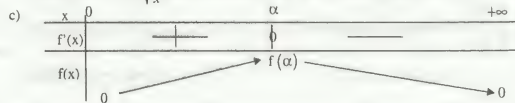
$$[\alpha, +\infty] \Rightarrow f(x) \geq f(\alpha). \text{ Donc } f \text{ admet un maximum en } \alpha.$$

$$2) a) \text{ On a } h : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ est une fonction décroissante sur } \mathbb{R}_+ \Rightarrow h(2x) \leq h(x) \text{ pour}$$

$$x \leq t \leq 2x \Rightarrow \int_x^{2x} h(t) dt \leq \int_x^{2x} h(x) dt \Leftrightarrow \int_x^{2x} h(t) dt \leq h(x) \int_x^{2x} 1 dt \Leftrightarrow \int_x^{2x} h(t) dt \leq h(x) (2x - x) = xh(x)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+8x^2}} \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0 \text{ de même } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+8x^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



$$3) a) h \text{ est décroissante sur } [0, +\infty), k+n \leq t \leq k+1+n \Rightarrow h(k+1+n) \leq h(t) \leq h(k+n).$$

$$\text{En intégrant, on aura :}$$

$$\int_{k+n}^{k+1+n} h(t) dt \leq \int_{k+n}^{k+1+n} h(k+n) dt \Rightarrow h(k+1+n) \leq \frac{1}{n} \int_{k+n}^{k+1+n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} \int_{k+n}^{k+1+n} h(k+n) dt \Rightarrow h(k+1+n) \leq h(k+n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$b) \text{ On a : pour } k=0 ; h(1+n) \leq \frac{1}{n} \int_n^{n+1} h(t) dt \leq h(n)$$

$$\text{pour } k=1 ; h(2+n) \leq \frac{1}{n} \int_n^{n+1} h(t) dt \leq h(1+n)$$

$$\dots \dots \dots \text{pour } k=n-1 ; h(2n) \leq \frac{1}{n} \int_{n-1}^n h(t) dt \leq h(2n-1).$$

$$\text{On somme membre à membre ces inégalités et après simplification, on obtient :}$$

$$h(1+n) + h(2+n) + \dots + h(2n) \leq \int_n^{2n} h(t) dt \leq h(n) + h(1+n) + \dots + h(2n-1) \Rightarrow S_n - h(n) \leq f(n) \leq S_n - h(2n).$$

$$\text{Ainsi } f(n) + h(2n) \leq S_n \leq h(n) + f(n).$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) + h(2n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) + h(n) \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0.$$

$$\text{Exercice 19 : } 1) a) x \mapsto \tan^2 x \text{ définie, continue et dérivable sur } \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right], \text{ donc } f \text{ est continue et dérivable sur}$$

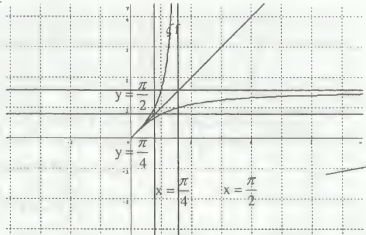
$$\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]. f'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]. \text{ Ainsi } f \text{ est strictement croissante sur}$$



b)  $f$  est continue strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $f$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f(0), \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(t)\right] = [0, +\infty[.$$

c)



2)  $I$  est l'aire de la partie du plan limitée par  $C$  et les droites d'équations  $x=0$ ,  $x=\frac{\pi}{4}$  et  $y=0$ .

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1 - 1) \, dx = \left[ \tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \text{ (u.a.)}. \text{ Or puisque 1 unité}^2 = 2 \text{ cm}^2, \text{ alors } I$$

u.a. =  $4 \text{ cm}^2$  et par suite  $I = 4 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}^2$ .  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{-1}(x) \, dx$ ;  $J$  est l'aire de la partie du plan limitée par  $C'$  et

les droites d'équations  $x=0$ ,  $x=1$  et  $y=0$ . Par raison de symétrie par rapport à la droite  $y=x$ ,  $J$  est l'aire de la partie du plan limitée par  $C = S_{\text{inter}}(C')$  et les droites d'équations  $y=0 = S_{\text{inter}}(x=0)$ .

$y = \frac{\pi}{4} = S_{\text{inter}}(x=1)$  et  $x=0 = S_{\text{inter}}(y=0)$  (toute symétrie orthogonale conserve les mesures d'aires).

$$I + J = \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow J = \frac{\pi}{4} - I = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \text{ (u.a.)} \Rightarrow J = 4 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \text{ cm}^2.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^4 x + \tan^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \tan^2 x \, dx = \left[ \frac{1}{3} \tan^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \tan^3 \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) \, dx = \pi \left[ \frac{1}{3} \tan^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left[ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

$$; V = \pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) \text{ (unité de volume)} = 8\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) \text{ cm}^3.$$

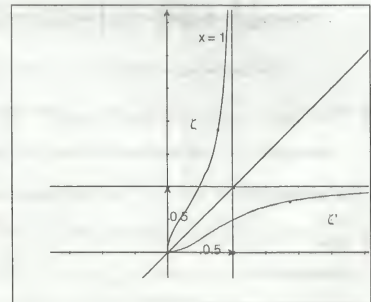
### Exercice 20 :

1) a) Soit  $x \in ]0, 1[$  et  $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$  et donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0 et  $\zeta_f$  admet au point d'abscisse 0 une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

b) La fonction  $x \mapsto \frac{x}{1-x}$  est dérivable et strictement positive sur  $]0, 1[$  et par suite  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et  $\forall x \in ]0, 1[$ :  $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{x}}$ .

c)  $f'(x) > 0$  sur  $]0, 1[$  et  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ .

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ : la droite ( $x=1$ ) est une asymptote verticale à  $\zeta_f$ .



2) a) D'après le tableau de variation de  $f$ :

$f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, 1]$ , donc elle réalise une bijection de  $[0, 1]$  sur  $f([0, 1]) = [0, +\infty[$  et par suite  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $[0, +\infty[$ .

b)  $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ ,  $x \mapsto f^{-1}(x) = y$ .

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y}} \Leftrightarrow x^2 = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{1+x^2}. \text{ D'où}$$

$f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $D' = S_4(D)$ ,  $S_4(C) = C'$ ,  $S_4((x=0)) = (y=0)$  et  $S_4((y=1)) = (x=1) \Rightarrow D'$  est le domaine limité par  $C'$ ,  $(O, i)$  et les droites ( $x=0$ ) et ( $x=1$ ). Or  $S_4$  conserve les mesures d'aires, donc

$$A = \int_0^1 f^{-1}(x) \, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx.$$

3) Soit  $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$  et  $u(x) = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ ,  $u$  est dérivable sur  $]-\pi, \pi[$ .

$h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $0 \in \mathbb{R}$  et si  $x \in ]-\pi, \pi[$ ,  $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \in \mathbb{R}$ , alors  $F$  est dérivable sur  $]-\pi, \pi[$  et

$$F'(x) = \frac{1 + \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \times \frac{1}{1 + \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}. \text{ Par suite } F(x) = \frac{x}{2} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Or on a } F(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

et donc  $F(x) = \frac{x}{2}$ .

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } \varphi'(x) = G'(x) - \pi F'(\pi(1-x)).$$

$$c) A = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 21 :** 1)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , alors il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  qui s'annule

en 0, définie par:  $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ ,  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $F'(x) = f(x)$ .

D'où  $g(x) = \frac{F(x)}{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ;  $x \mapsto F(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto x$  est aussi continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = g(0).$$

Donc  $g$  est continue en 0 et par suite  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

2)  $x \mapsto F(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $g$  est dérivable sur

$$\mathbb{R}_+^* \text{ et } g'(x) = \frac{F(x)x - F(x)}{x^2} = \frac{1}{x} [f(x) - g(x)].$$

3) Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \cos^2(\pi t) \, dt$  et  $g(0) = f(0) = 1$ .

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1 + \cos 2\pi t}{2} \, dt = \frac{1}{2x} \left[ t + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t \right]_0^x = \frac{1}{2x} \left[ x + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \right] = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{4\pi x}.$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{4\pi x} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 & \end{cases}$$

**Exercice 22 :** 1) a)  $t \mapsto \sin t$  et  $t \mapsto t$  sont deux fonctions continues sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  et  $t \neq 0 \forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , donc  $f$  est continue sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  et par suite  $I$  est bien défini.  $I$  est l'aire de la partie du plan limitée par  $\zeta_f$  et les

droites d'équations ( $x=\pi$ ),  $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$  et ( $y=0$ ).

b)  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \Rightarrow \frac{1}{\pi} \leq \frac{t}{\pi} \leq \frac{2}{\pi}$  et comme  $\sin t \geq 0$ ;  $\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , alors  $\frac{\sin t}{t} \leq \frac{\sin t}{\pi} \leq \frac{2 \sin t}{\pi}$ . Ces fonctions sont continues sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{\pi} \, dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 \sin t}{\pi} \, dt \Rightarrow \left[ -\frac{\cos t}{\pi} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \leq I \leq \left[ -\frac{2 \cos t}{\pi} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Rightarrow \frac{1}{\pi} \leq I \leq \frac{2}{\pi}.$

2) a)  $G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x)) \Leftrightarrow G(x) + F(\pi(1-x)) = F(\pi)$ ,  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

On pose  $\varphi(x) = G(x) + F(\pi(1-x))$ ; on a  $0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \pi t \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $t \mapsto \sin \pi t$ ,  $t \mapsto 1-t$  sont continues sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et  $1-t \neq 0$ , donc  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  est continue sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Donc  $G$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et  $G'(x) = \frac{\sin \pi x}{1-x}$ ,  $f$  est continue sur  $\frac{\sin \pi x}{1-x} - \pi \frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)}$ , donc  $F$  est dérivable sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ,  $x \mapsto \pi(1-x)$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

et pour  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $\pi(1-x) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  et donc  $x \mapsto F(\pi(1-x))$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Ainsi  $\varphi$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et  $\varphi'(x) = G'(x) - \pi F'(\pi(1-x)) = \frac{\sin \pi x}{1-x} - \pi \frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{1-x} - \frac{\sin \pi x}{1-x} = 0$  Donc  $\varphi$  est constante sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $\varphi(x) = \varphi(0) = G(0) + F(\pi) = 0 + F(\pi) \Rightarrow G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$ .

b) Pour  $x = \frac{1}{2}$ , on a:  $G\left(\frac{1}{2}\right) = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \, dt = \left[ -\frac{\cos t}{\pi} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{\pi} - \frac{0}{\pi} = \frac{1}{\pi}$ . Ainsi

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi t}{1-t} \, dt.$$

3) a)  $U_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi t \, dt = \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$ , on pose  $u(t) = t$  et  $v(t) = \sin \pi t \Rightarrow u'(t) = 1$  et  $v(t) = \frac{-1}{\pi} \cos \pi t$ .

$$U_1 = \left[ -\frac{t}{\pi} \cos \pi t \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi t \, dt = 0 + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^2}.$$



b)  $U_n = \int_0^1 t^n \sin \pi t \, dt$ , on pose  $u(t) = t^n$  et  $v(t) = \sin \pi t \Rightarrow u'(t) = nt^{n-1}$  et  $v'(t) = \frac{1}{\pi} \cos \pi t$ .

$$U_n = \left[ -\frac{t^n}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 + \frac{n}{\pi} \int_0^1 t^{n-1} \cos \pi t \, dt = \frac{n}{\pi} \int_0^1 t^{n-1} \cos \pi t \, dt, \text{ on pose } u(t) = t^{n-1} \text{ et } v'(t) = \cos \pi t$$

$$\Rightarrow u'(t) = (n-1)t^{n-2} \text{ et } v(t) = \frac{1}{\pi} \sin \pi t, \int_0^1 t^{n-1} \cos \pi t \, dt = \left[ \frac{t^{n-1}}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 - \frac{n-1}{\pi} \int_0^1 t^{n-2} \sin \pi t \, dt =$$

$$\frac{1}{\pi 2^{n-1}} - \frac{n-1}{\pi} U_{n-2}. \text{ Donc } U_n = \frac{n}{\pi} \left( \frac{1}{\pi 2^{n-1}} - \frac{n-1}{\pi} U_{n-2} \right) = \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1) U_{n-2} \right]; U_3 = \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{3}{2^2} - 3 \times 2 \times U_1 \right].$$

$$4) a) S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = \int_0^1 [1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}] \sin \pi t \, dt = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} \sin \pi t \, dt.$$

$$\Rightarrow I - S_n = \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{1-t} - \frac{1-t^n}{1-t} \sin \pi t \, dt = \int_0^1 \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \, dt = J_n.$$

$$b) 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \pi t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \sin \pi t \leq 1; -\frac{1}{2} \leq -t \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1-t \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1-t} \leq 2. \Rightarrow 0 \leq \frac{\sin \pi t}{1-t} \leq 2.$$

On obtient  $0 \leq \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leq 2t^n \, \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  (\*). Comme ces fonctions sont continues, alors

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \, dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2t^n \, dt = 2 \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow J_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

c) D'après (\*), on a  $0 \leq \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \Rightarrow 0 \leq J_n$ . Ainsi, on a :  $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ .  
 $I - S_n = J_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I$ .

### Exercice 23:

$$1) \int_0^x \cos t \, dt = [\sin t]_0^x = \sin x - \sin 0 = \sin x.$$

$$1 - \int_0^x \sin t \, dt = 1 - [-\cos t]_0^x = 1 - (-\cos x + \cos 0) = \cos x.$$

$$2) a) \text{ On a : pour } t \in \mathbb{R}, \cos t \leq 1 \Rightarrow \int_0^x \cos t \, dt \leq \int_0^x 1 \, dt \Rightarrow \sin x \leq x \, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Or on a : } \cos x = 1 - \int_0^x \sin t \, dt$$

$$\text{Or } \sin t \leq t \Rightarrow \int_0^x \sin t \, dt \leq \int_0^x t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 1 - \int_0^x \sin t \, dt \geq 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

$$b) \text{ On a } \forall t > 0 : \cos t \geq 1 - \frac{t^2}{2!} \Rightarrow \int_0^x \cos t \, dt \geq \int_0^x \left( 1 - \frac{t^2}{2} \right) dt \text{ pour tout } x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \left[ t - \frac{t^3}{3!} \right]_0^x = x - \frac{x^3}{3!} \, \forall x \geq 0.$$

$$\text{On a } \sin t \geq t - \frac{t^3}{3!} \Rightarrow \int_0^x \sin t \, dt \geq \int_0^x \left( t - \frac{t^3}{3!} \right) dt = \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4!} \right]_0^x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!};$$

$$1 - \int_0^x \sin t \, dt \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \Rightarrow \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

$$3) D'après 2) b) \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \Rightarrow \sin x - x \geq -\frac{x^3}{3!} \quad (1).$$

De même d'après 2) b) :

$$\text{on a : } \cos t - 1 \leq -\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \Rightarrow \int_0^x (\cos t - 1) dt \leq \int_0^x \left( -\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \right) dt \Rightarrow \sin x - x \leq -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad (2).$$

$$(1) \text{ et } (2) \text{ donnent : } -\frac{x^3}{3!} \leq \sin x - x \leq -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Pour  $x > 0$ , on a :  $\frac{-1}{3!} \leq \frac{\sin x - x}{x^3} \leq \frac{-1}{3!} + \frac{x^2}{5!} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}$  (d'après le théorème de comparaison).

### SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

**Exercice N° 1 :** 1) b); 2) c); 3) b); 4) d); 5) b); 6) b); 7) a); 8) c); 9) b); 10) a); 11) c); 12) a); 13) c).

**Exercice N° 2 :** 1) a) et c); 2) b) et d); 3) a) et c); 4) b) et d).

**Exercice N° 3 :** 1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux ; 4) Vrai ; 5) Vrai

**Exercice N° 4 :** 1) Soit  $\Delta : \{M(z) \in \mathbb{P} \text{ tel que } |z-1| = |z-i|\}$ ;  $M \in \Delta \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow AM = BM$  avec  $A(1); B(i) \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB]$  donc  $\Delta = \text{med}[AB]$

2)  $z$  solution de (E)  $\Leftrightarrow (z-1)^n = -i(z-i)^n \Rightarrow |z-1|^n = |z-i|^n \Rightarrow |z-1| = |z-i| \Rightarrow M \in \Delta$

**Exercice N° 5 :** 1)  $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(1-i)z-1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(1-i)z-1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| z - \frac{1+i}{2} \right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left| z - \frac{1+i}{2} \right| = 1 \Rightarrow BM = 1$ ;  $\left( B - \frac{1+i}{2} \right) \Leftrightarrow M \in \zeta(B;1)$ . Donc l'ensemble des points  $M(z)$  tel que  $|z| = \sqrt{2}$  est  $\zeta(B;1)$ .

2) a)  $AM' = |z-i| = |(1-i)z-(1+i)| = |1-i||z-i| = \sqrt{2}|z-i|$ ;  $AM = |z-i|$ ;  $MM' = |(1-i)z-1-z| = |-i||z-i| = |z-i| = |z-i|-1-z| = |-iz-1-z| = |-iz-1-z|$  Alors le triangle  $AMM'$  est un triangle et rectangle isocèle en M.

$$b) \left( \overline{AM}; \overline{AM'} \right) = \arg \left( \frac{z-i}{z-i} \right) [2\pi] = \arg \left( (1-i) \left( \frac{z-1}{z-i} \right) \right) [2\pi] = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

c) M un point du plan alors le point  $e f(M) = M'$  est le sommet du triangle  $AMM'$  rectangle et isocèle en M de sens indirect car  $(AMM')$  est un triangle et rectangle isocèle en M. et  $\left( \overline{AM}; \overline{AM'} \right) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

3) Soit  $E = \{M(z) \in \mathbb{P} : \arg(z) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]\}$  il faut que  $z \neq 0 \Rightarrow z \neq \frac{1+i}{2} \Rightarrow M \neq B$ ;

$$M \in E \Leftrightarrow \arg z = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \Leftrightarrow \arg \left( (1-i)z-1 \right) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \left( (1-i) \left( z - \frac{1+i}{2} \right) \right) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(1-i) + \arg \left( z - \frac{1+i}{2} \right) = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \arg(z_M - z_B) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{avec } B \left( \frac{1+i}{2} \right), (\overline{u}; \overline{BM}) = 0 [2\pi] \Rightarrow M \in [BK] \text{ tel que } K \left( 1 + \frac{1+i}{2} \right) \text{ Or } M \neq B \Rightarrow E = [BK] \setminus \{B\}$$

**Exercice N° 6 :** 1)  $z = \frac{iz+1}{z+i}$ . Soit M un point invariant,

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = z.$$

$$\text{On pose } z = x + iy, \quad z = \frac{iz+1}{z+i} \Leftrightarrow z(z+i) = iz+1 \Leftrightarrow zz+zi = iz+1$$

$$\Leftrightarrow zz+zi-iz-1=0 \Leftrightarrow zz+zi-iz-1=0 \Leftrightarrow |z|^2 + i(x+iy-x+iy) = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + i(2iy) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2}. \text{ L'ensemble des points invariants est le cercle de centre } A(0;1) \text{ et de rayon } \sqrt{2}.$$

$$2) \text{ On a } M \neq A; \quad \frac{\text{aff}(\overline{AM})}{\text{aff}(\overline{AM})} = \frac{z-z_A}{z_M-z_A} = \frac{\frac{iz+1}{z+i} - i}{z_M - i} = \frac{\frac{iz+1-iz-i}{z+i}}{z_M - i} = \frac{2}{(z+i)(z_M-i)} = \frac{2}{|z-i|^2}.$$

Or  $|z-i|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ . Donc  $\frac{\text{aff}(\overline{AM})}{\text{aff}(\overline{AM})} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\text{aff}(\overline{AM})}{\text{aff}(\overline{AM})} = \alpha \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \text{aff}(\overline{AM}) = \alpha \text{aff}(\overline{AM})$ . Donc

$\overline{AM'} = \alpha \overline{AM}$  et par suite  $A; M$  et  $M'$  sont trois points alignés.

$$3) a) \text{ Montrons que : } (\overline{u}; \overline{OM}) = \frac{\pi}{2} + (\overline{MB}; \overline{MA}) [2\pi].$$

$$(\overline{u}; \overline{OM}) = \arg(z) [2\pi] = \arg \left( \frac{iz+1}{z+i} \right) [2\pi] = \arg \left( i \right) \left( \frac{z-i}{z+i} \right) [2\pi] = \arg(i) + \arg \left( \frac{z-i}{z+i} \right) [2\pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arg \left( \frac{z-i}{z+i} \right) [2\pi] = \frac{\pi}{2} - \arg \left( \frac{z+i}{z-i} \right) [2\pi] = \frac{\pi}{2} - \arg \left( \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \right) [2\pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} - (\overline{AM}; \overline{BM}) [2\pi] = \frac{\pi}{2} + (\overline{MB}; \overline{MA}) [2\pi]. \text{ Donc } (\overline{u}; \overline{OM}) = \frac{\pi}{2} + (\overline{MB}; \overline{MA}) [2\pi]$$

$$b) M \in \zeta_{(AB)} \setminus \{A, B\} \Rightarrow (\overline{MA}; \overline{MB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow (\overline{u}; \overline{OM}) = \frac{\pi}{2} + (\overline{MB}; \overline{MA}) [2\pi]$$

donc  $(\overline{u}; \overline{OM}) = \pi [2\pi] \Rightarrow M' \in (OM) \setminus \{O\} \Rightarrow M' \in (O, \overline{u})$ .

c)  $M \in \zeta_{(AB)}$  donc  $M' \in (O, \overline{u})$ ;  $A; M$  et  $M'$  sont alignés

donc  $M' \in (O, \overline{u}) \cap (AM)$ .

**Étape de construction :** On marque un point

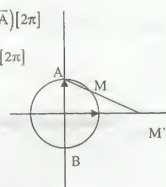
$M \in \zeta_{(AB)} \setminus \{A, B\}$

$$\{M'\} = (O, \overline{u}) \cap (AM).$$

**Exercice N° 7 :** 1) a)  $f(M) = M \Leftrightarrow z = z$  et  $z \neq \frac{1+i}{2} \Leftrightarrow z^2 - (1+i)z + i = 0$  et  $z \neq \frac{1+i}{2} \Leftrightarrow z = 1$  ou  $z = i$

$$\text{car } \Delta = (1+i)^2 - 4i = 1+2i-1-4i = -2i = (1-i)^2; \quad z = \frac{(1+i)-(1-i)}{2} = i; \quad z = \frac{(1+i)+(1-i)}{2} = 1$$

Donc A(1) et B(i) sont les seuls points invariants par f.





$$b) f(M) = I \text{ et } M \neq I \Rightarrow \frac{z^2 - i}{2z - (1+i)} = \frac{1+i}{2} \Leftrightarrow z^2 - i = z(1+i) - i \Leftrightarrow z^2 - z(1+i) = 0 \\ \Leftrightarrow z(z - (1+i)) = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1+i \quad M = O \text{ ou } M = C(1+i)$$

$$2) a) z \in \mathbb{C} \setminus \left\{1; \frac{1+i}{2}\right\}; \quad \frac{z'-i}{z-1} = \frac{2z-(1+i)}{2z-(1+i)-1} = \frac{z^2-2iz+i^2}{z^2-2z+1} = \frac{(z-i)^2}{(z-1)^2}$$

$$b) \frac{z'-i}{z-1} = \frac{(z-i)^2}{(z-1)^2} \Rightarrow \left| \frac{z'-i}{z-1} \right| = \left| \frac{z-i}{z-1} \right|^2 \text{ et } \arg\left(\frac{z'-i}{z-1}\right) = 2\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) [2\pi] \\ \Leftrightarrow \left| \frac{z'-i}{z-1} \right| = \left| \frac{z-i}{z-1} \right|^2 \text{ et } \arg\left(\frac{z'-i}{z-1}\right) = 2\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) [2\pi]$$

$$\text{donc } \frac{BM}{AM} = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2 \text{ et } (\overline{AM}; \overline{BM}) = 2(\overline{AM}; \overline{BM}) [2\pi]$$

c) M est un point du cercle de diamètre [AB] privé de A et B

$$\Leftrightarrow (\overline{MA}; \overline{MB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow (\overline{AM}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow 2(\overline{AM}; \overline{BM}) = \pi + 4k\pi \Leftrightarrow 2(\overline{AM}; \overline{BM}) = \pi [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AM}; \overline{BM}) = \pi [2\pi] \Leftrightarrow M' \in [AB] \setminus \{A; B\} \text{ donc } M' \text{ décrit le segment } [AB] \text{ privé des points } A \text{ et } B.$$

$$3) a) \Delta = \text{med}[AB]; \text{ si } M \in \Delta \setminus \{I\} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow \frac{BM^2}{AM^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1; M' \in \Delta$$

b) On a  $M' \in \Delta$  et  $(\overline{MA}; \overline{MB}) = 2(\overline{MA}; \overline{MB}) [2\pi]$  donc  $M'$  est le centre de cercle circonscrit au triangle ABM.

**étape de construction :**

Soit  $M \in \Delta \setminus \{I\}$ ; on trace  $\Delta' = \text{med}[AM]$ ;  $\{M'\} = \Delta \cap \Delta'$

**Exercice 8 :** 1) Soit M un point invariant par f.

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{iz-2}{z+i} \Leftrightarrow z(z+i) = iz-2 \Leftrightarrow z^2 + iz = iz-2 \Leftrightarrow z^2 = -2 \text{ On pose } z = x + iy;$$

$$x^2 + y^2 + i(2iy) = -2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2iy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = -2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 + 1 = 0 \text{ impossible donc } f \text{ n'admet aucun point invariant.}$$

$$2) f: P \setminus \{A\} \rightarrow P \setminus \{A\}; M(z) \mapsto M'(z'). \text{ Soit } M' \in P \setminus \{A\}; \text{ montrons qu'il existe un unique point}$$

$$M \in P \setminus \{A\} \text{ tel que } f(M) = M'. \quad z' = \frac{iz-2}{z+i} \Leftrightarrow z'(z+i) = iz-2 \Leftrightarrow z'z + iz' = iz-2 \Leftrightarrow z'z = iz-2-iz' = -2-iz'$$

$$\text{Or } M' \in P \setminus \{A\} \Leftrightarrow z' = \frac{-2-iz'}{z'+i} \Leftrightarrow z' = \frac{-2-iz'}{z'+i} \text{ donc il existe un point } M \in P \setminus \{A\} \text{ tel que } f(M) = M'$$

$$\text{et } f^{-1}: (M(z)) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{-2-iz'}{z'+i}. \text{ Donc } f \text{ est bijective et } f^{-1}(M) = f(M)$$

103

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Math

$$3) a) \frac{z'-i}{z-1} = \frac{iz-2}{z+i} = \frac{iz-2-iz+1}{(z-i)(z+i)} = \frac{-1}{|z-i|^2} \text{ car } \forall \lambda \in \mathbb{C}; \lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$$

$$b) \left| \frac{z'-i}{z-1} \right| = \frac{1}{|z-i|^2} \Leftrightarrow \left| \frac{z'-i}{z-1} \right| = \frac{1}{|z-i|^2} \Leftrightarrow \frac{AM'}{AM} = \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AM' \cdot AM = 1. \text{ Montrons que } A \in [MM'].$$

$$\frac{\text{aff } \overline{AM'}}{|z-i|^2} = \frac{-1}{|z-i|^2} \Leftrightarrow \text{aff } \overline{AM'} = \frac{-1}{|z-i|^2} \text{ aff } \overline{AM} \text{ Or } \frac{-1}{|z-i|^2} \in \mathbb{R}^+ \text{ donc } \overline{AM} \text{ et } \overline{AM'} \text{ sont colinéaires de sens contraire.}$$

$$\text{2<sup>ème</sup> méthode: } \arg\left(\frac{z'-i}{z-1}\right) = \arg\left(\frac{-1}{|z-i|^2}\right) [2\pi] = \pi [2\pi]; (\overline{AM}; \overline{AM'}) = \pi [2\pi] \Rightarrow A \in [MM']$$

$$c) M \in \xi_{(A;2)} \Leftrightarrow AM = 2 \Leftrightarrow 2 \times AM' = 1 \Leftrightarrow AM' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M' \in \xi_{(A;1/2)} \Rightarrow f(\xi_{(A;2)}) = \xi_{(A;1/2)}$$

$$d) \text{ On marque un point } M \text{ sur } \xi_{(A;3)}; \text{ on trace } \xi' = \xi_{(A;2)}$$

$M'$  est le point d'intersection de  $\xi'$  avec (AM)

$$4) f(M) = M'; M \in \xi_{(O;1)} \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$\text{On a } M'A = |z'-i| = \left| \frac{iz-2}{z+i} - i \right| = \left| \frac{iz-2-iz+1}{z+i} \right| = \left| \frac{-1}{z+i} \right| = \frac{1}{|z+i|} \quad (\oplus)$$

$$\text{et } M'B = |z'-2i| = \left| \frac{iz-2}{z+i} - 2i \right| = \left| \frac{iz-2-2iz-2}{z+i} \right| = \left| \frac{-iz-4}{z+i} \right| = \frac{|-iz-4|}{|z+i|} = \frac{|z+4i|}{|z+i|} \text{ car } |z|=1 \quad (\otimes)$$

d'après  $\oplus$  et  $\otimes$  On a  $M'A = M'B$ ;  $M \in \xi \Rightarrow M'A = M'B \Rightarrow M' \in \text{med}[AB]$

Donc l'image de cercle de centre O et de rayon 1 est la médiatrice de [AB]

b)  $N \in \xi_{(O;1)} \setminus \{A\} \Leftrightarrow f(N) = N' \in \text{med}[AB]$ ; Or  $A \in [NN']$  d'après 3) a)

on prend  $N$  sur  $\xi_{(O;1)} \setminus \{A\}$ ; la médiatrice de [AB] coupe (NA) en  $N'$ .

$$\text{Exercice N° 9: 1) } p = \frac{|a|}{a}; q = \frac{|b|}{b}; r = \frac{|c|}{c}; \overline{OH} = \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR}$$

$$a) \overline{PH} \cdot \overline{QR} = (\overline{PO} + \overline{OH})(\overline{QO} + \overline{OR}) = (\overline{PO} + \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR})(\overline{QO} + \overline{OR}) = (\overline{OQ} + \overline{OR})(\overline{OR} - \overline{OQ})$$

$$= OR^2 - OQ^2 = |a|^2 - |q|^2 = \left(\frac{|a|}{|a|}\right)^2 - \left(\frac{|b|}{|b|}\right)^2 = 1 - 1 = 0 \text{ d'où } \overline{PH} \perp \overline{QR} \quad (1); \overline{OH} \cdot \overline{PR} = 0 \text{ d'où } \overline{OH} \perp \overline{PR} \quad (2)$$

Donc d'après (1) et (2) On obtient H est l'orthocentre de PQR.

104

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Math

b) Remarquons que O est le centre de cercle circonscrit au triangle PQR;  $OP = OQ = OR = 1$ , PQR est équilatéral  $\Leftrightarrow O = H \Leftrightarrow \overline{OH} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} = \overline{0} \Leftrightarrow p + q + r = 0$ . Donc PQR est équilatéral si et seulement si  $p + q + r = 0$ .

$$2) a) \text{ On a } S_1 = |p(z-a) + q(z-b) + r(z-c)| \leq |p(z-a)| + |q(z-b)| + |r(z-c)| \\ \leq |p||z-a| + |q||z-b| + |r||z-c| \leq |p||z-a| + |q||z-b| + |r||z-c| \leq S_1 \text{ car } |p| = |q| = |r| = 1, \text{ d'où } S_1 \leq S_1 \\ S_2 = |p(z-a) + q(z-b) + r(z-c)| = |pz - pa + qz - qb + rz - rc| = |z(p+q+r) - pa - qb - rc| \\ = |-pa - qb - rc| = \left| -\frac{|a|}{a} - \frac{|b|}{b} - \frac{|c|}{c} \right| = \left| -\frac{|a|}{a} - \frac{|b|}{b} - \frac{|c|}{c} \right| = \left| \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} \right| = \left| \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} \right|. \text{ Or } S_2 \leq S_1 \text{ donc}$$

$$|z-a| + |z-b| + |z-c| \geq |a| + |b| + |c|.$$

b) D'après 2) a);  $MA + MB + MC \geq OA + OB + OC$  donc  $MA + MB + MC$  est minimale pour  $M = O$

**Exercice N° 10 :** 1) On pose  $z = x + iy$ ;  $A(1)$ ;  $M(z)$  et  $M(1+z^2)$

$$\text{Aff}(\overline{AM}) = z-1 = x-1+iy \Rightarrow \overline{\text{Aff}(\overline{AM})} = \overline{x-1+iy} = x-1-iy; \text{ aff}(\overline{AM}) = 1+z^2-1 = z^2 = x^2-y^2+2ixy \Rightarrow \overline{\text{Aff}(\overline{AM})} = x^2-y^2-2ixy$$

$$A; M \text{ et } M \text{ alignés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & x^2-y^2 \\ y & -2xy \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)2xy - y(x^2-y^2) = 0 \Leftrightarrow y[2x^2-2x-(x^2-y^2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x^2+y^2-2x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ donc l'ensemble recherché est } (O, \vec{u}) \cup \xi_{(A;1)}$$

2) A(i); M(z) et M'(iz); AMM' est un triangle équilatéral  $\Leftrightarrow AM = MM' = AM'$

$$\Leftrightarrow |z-i| = |iz-z| = |z-i| \Leftrightarrow \begin{cases} |z-i| = |z-i| \\ |z-i| = |z-i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-i| = \sqrt{2}|z| \\ |z-i| = |z-i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-i|^2 = 2|z|^2 \\ |z-i|^2 = |z-i|^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z-i)(\bar{z}+i) = 2z\bar{z} \\ (z-i)(\bar{z}+i) = (z-1)(\bar{z}-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\bar{z} + iz - iz - i = 2z\bar{z} \\ z\bar{z} + iz - iz + 1 = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\bar{z} - i(z-\bar{z}) = 1 \\ z\bar{z} + i(z-\bar{z}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - i(2iy) = 1 \\ 2ix + i(2iy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - i = 0 \\ 2ix + i(2iy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - i = 0 \\ 2x^2 + 2x - i = 0 \end{cases}; \quad 2x^2 + 2x - i = 0;$$

$$\Delta = 12; x' = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; x'' = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}; S_1 = \left\{B\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right); C\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

**Exercice N° 11 :**  $z' = \frac{iz+2}{z-i}$  avec  $(z \neq i)$

$$1) a) M(z) \text{ est invariant par } f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{iz+2}{z-i} = z \Leftrightarrow iz+2 = z(z-i) \Leftrightarrow iz+2 = z^2-iz+2 \Leftrightarrow z^2-2iz-2=0; \Delta = i^2+2 = -1+2 = 1; z_1 = i-1; z_2 = i+1. \text{ Les points invariants sont } I \text{ et } J \text{ tel que: } I(i-1) \text{ et } J(i+1)$$

105

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Math

$$b) \frac{z_1}{z_2} = \frac{i-1}{i+1} = \frac{-1+i}{1+i} = i \Leftrightarrow \overline{OI} \perp \overline{OJ} \quad (1); \frac{z_1}{z_2} = i \Rightarrow OI = OJ \quad (2) \text{ car } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2|. \text{ De (1) et (2) On conclut que } OIJ \text{ est un triangle rectangle isocèle en } O.$$

$$2) (\overline{u}; \overline{OM}) = \arg(z) [2\pi] = \arg\left(\frac{iz+2}{z-i}\right) [2\pi] = \arg(i) + \arg\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) [2\pi] = \frac{\pi}{2} + (\overline{AM}; \overline{BM}) [2\pi]$$

$$3) a) \begin{cases} M(z) \in \Gamma \\ M \neq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' \text{ est un réel} \\ z' \neq i \end{cases} \Leftrightarrow z' = 0 \text{ ou } \begin{cases} z' = 0 \\ \arg z = 0 [2\pi] \end{cases}$$

$$z' = 0 \Leftrightarrow z-2i = 0 \Leftrightarrow z = 2i \Leftrightarrow B = M \quad (1) \quad z' \neq 0$$

$$M \neq B \text{ et } M \neq A$$

$$\arg(z') = 0 [2\pi] \Leftrightarrow (\overline{AM}; \overline{BM}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow M \in \xi_{(AB)} \setminus \{A; B\} \quad (2).$$

De (1) et (2) On obtient  $(\Gamma) = \xi_{(AB)} \setminus \{A\}$

$$b) M(z) \in (E) \begin{cases} M \neq A \\ M \neq B \end{cases} \Leftrightarrow (\overline{AM}; \overline{BM}) = \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) [2\pi] = \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

Donc (E) est l'arc  $[\widehat{AB}] \setminus \{A, B\}$  du cercle  $\zeta$  tangent à [AT] avec  $(\overline{AT}; \overline{AB}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ .  $[\widehat{AB}]$  est situé dans le demi plan de l'extérieur (AB) ne contenant pas [AT].

$$c) M(z) \in (G) \text{ avec } M \neq A \text{ et } M \neq B \Leftrightarrow (\overline{u}; \overline{BM}) = 0 [2\pi];$$

$M \in [Bt] \setminus \{B\} \Leftrightarrow (\overline{u}; \overline{Bt}) = 0 [2\pi]$  signifie  $\vec{u}$  et  $\vec{Bt}$  sont colinéaires et de même sens.

$$M \in [Bt] \text{ avec } [Bt] \setminus \{O, \vec{u}\} \Rightarrow G = [Bt] \setminus \{B\}$$

$$4) a) (\overline{u}; \overline{AM}) + (\overline{u}; \overline{AM}) = \arg((z-i)(z-i)) [2\pi]. \text{ On a } z-i = \frac{iz+2}{z-i} - i = \frac{iz+2-iz-1}{z-i} = \frac{1}{z-i} \\ \Leftrightarrow (z-i)(z-i) = 1 \Rightarrow \arg((z-i)(z-i)) = 0 [2\pi] \Rightarrow (\overline{u}; \overline{AM}) + (\overline{u}; \overline{AM}) = 0 [2\pi]$$

$$b) (\overline{u}; \overline{AM}) + (\overline{u}; \overline{AM}) = 0 [2\pi] \Leftrightarrow (\overline{u}; \overline{AM}) = -(\overline{u}; \overline{AM}) [2\pi];$$

$$M' = S_A(M) \text{ avec } \Delta: y=1; A(0,1); (\overline{AM}) = S_A((\overline{AM}));$$

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow z' \text{ est réel} \Rightarrow M' \in (O, \vec{u})$$

$$\text{Exercice N° 12: 1) } U_0 = z_0 - i = 1 - i = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^0. \text{ Vrai. Soit } n \in \mathbb{N};$$

$$\text{supposons que } U_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et montrons que } U_{n+1} = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

$$U_{n+1} = z_{n+1} - i = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3} - i = \frac{1}{3}z_n - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - i = \frac{1}{3}(z_n - i) = \frac{1}{3}U_n$$

106

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Math



$$= \frac{1}{3}(1-i) \left( \frac{1}{3} \right)^n = (1-i) \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1} \text{ Donc } \forall n \in \mathbb{N}; U_n = (1-i) \left( \frac{1}{3} \right)^n$$

$$2) a) |U_n| = \frac{\sqrt{2}}{3^n} \text{ car } \sqrt{2} = |1-i|; \arg U_n = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$b) \arg U_n = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \Rightarrow A_n \in [Ox] \setminus \{O\} \text{ tel que } (\vec{u}, \vec{Ox}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi], \text{ donc les points } A_n \text{ sont alignés.}$$

$$c) z_n = U_n + i; \text{ aff}(B_n) = \text{aff}(A_n) + i \Leftrightarrow \text{aff}(B_n) - \text{aff}(A_n) = i \Rightarrow \vec{A_n B_n} = \vec{v} \text{ où } \vec{v}(i) \Rightarrow i \cdot (A_n) = B_n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Les points } A_n \text{ sont alignés donc leurs images } B_n \text{ sont alignées.}$$

**Exercice N° 13 :**  $S + iS' = C_{4p}^0 - C_{4p}^2 + C_{4p}^4 + \dots + C_{4p}^{4p} + iC_{4p}^1 - iC_{4p}^3 + iC_{4p}^5 - \dots - iC_{4p}^{4p-1}$

$$\text{Or } (1+i)^{4p} = \sum_{k=0}^{4p} C_{4p}^k (i)^k = C_{4p}^0 (i)^0 + C_{4p}^1 (i)^1 + C_{4p}^2 (i)^2 + C_{4p}^3 (i)^3 + \dots + C_{4p}^{4p} (i)^{4p} \cdot \text{Or}$$

$$(i)^{2k} = (-1)^k \text{ et } (i)^{2k+1} = (i)^{2k} \cdot i = (-1)^k \cdot i. \text{ Donc } 1 + (i)^{4p} = S + iS';$$

$$\text{Or } (1+i)^{4p} = ((1+i)^4)^p = ((1+i)^2)^2)^p = (2i)^2)^p = (-1)^p 4^p \text{ donc } S + iS' = (-1)^p 4^p; \text{ par suite}$$

$$S = (-1)^p 4^p \text{ et } S' = 0$$

**Exercice N° 14 :** 1)  $4z^2 - 2\sqrt{3}e^{i0}z + e^{i20} = 0; \Delta = 12e^{i20} - 16e^{i20} = -4e^{i20} = (2ie^{i0})^2$

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}e^{i0} + 2ie^{i0}}{8} = \left( \frac{\sqrt{3}+i}{4} \right) e^{i0}; z_2 = \frac{2\sqrt{3}e^{i0} - 2ie^{i0}}{8} = \left( \frac{\sqrt{3}-i}{4} \right) e^{i0}$$

$$2) z_1 = \left( \frac{\sqrt{3}+i}{4} \right) e^{i0}; \sqrt{3}+i = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}; z_1 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i0} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$; z_2 = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} e^{i0} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$3) a) z_1 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}; OM_1 = |z_1| = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} (\sqrt{3} + i)$$

$$\text{Donc } M_1 \text{ et } M_2 \in \left( \frac{\sqrt{3}+i}{4} \right) e^{i0}; \sqrt{3}+i = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$b) \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{3+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1}{4} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$c) \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) [2\pi] = \frac{\pi}{3} [2\pi] \Leftrightarrow (\overline{OM_1}; \overline{OM_2}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ et comme } OM_1 = OM_2,$$

donc  $OM_1 M_2$  est un triangle équilatéral.

$$4) (\vec{u}; \vec{M_1 M_2}) = \arg(z_2 - z_1) [2\pi]; \text{ Or On a :}$$

$$z_2 - z_1 = \left( \frac{\sqrt{3}-i}{4} \right) e^{i0} - \left( \frac{\sqrt{3}+i}{4} \right) e^{i0} = e^{i0} \left( \frac{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}{4} \right) = e^{i0} \left( \frac{-2i}{4} \right)$$

$$\Rightarrow (\vec{u}; \vec{M_1 M_2}) = \arg e^{i0} + \arg(-i) [2\pi] = 0 - \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$5) 4z^4 - 2\sqrt{3} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) z^2 + i = 0; E_0: 4z^2 - 2\sqrt{3}e^{i0}z + e^{i20} = 0. \text{ On prend } \theta = \frac{\pi}{4};$$

$$E_1: 4z^2 - 2\sqrt{3} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) z + i = 0. \text{ Or d'après 2) } E_1 \text{ admet deux solutions :}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}; z_2 = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{12}}. \text{ On pose}$$

$$z^2 = \lambda; (E): 4\lambda^2 - 2\sqrt{3} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \lambda + i = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 2\sqrt{3} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \lambda + i = 0 \Rightarrow \lambda = z_1 \text{ ou } \lambda = z_2$$

$$\text{Donc les solutions de } E_0 \text{ sont : } \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}; \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}; \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}; \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

**Exercice N° 15 :** 1)  $(E): iz^2 + 2e^{i0}z - 2i \cos \theta e^{i0} = 0; \Delta = 4e^{i20} - 8 \cos \theta e^{i0} = 4e^{i0} [e^{i20} - 2 \cos \theta]$

$$= 4e^{i0} [\cos \theta + i \sin \theta - 2 \cos \theta] = 4e^{i0} [-\cos \theta + i \sin \theta] = 4e^{i0} e^{i(\pi-0)} = 4e^{i0} e^{-i0} e^{i\pi} = -4 = (2i)^2$$

$$z' = \frac{-2e^{i0} - 2i}{2i} = ie^{i0} - 1; z'' = ie^{i0} + 1$$

$$2) a) z_1 = 1 + ie^{i0} = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}}. \text{ Or on a } 1 + e^{i\alpha} = e^{i0} + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} \left( e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}} \right) = e^{i\frac{\alpha}{2}} \left( 2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}. \text{ Soit } \alpha = \theta + \frac{\pi}{2}; z_1 = 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$= e^{i\frac{\alpha}{2}} \left[ e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}} \right] = 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}. \text{ Soit } \alpha = \theta + \frac{\pi}{2}; z_1 = 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\text{or } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0; z_1 = 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \text{ est la forme exponentielle de } z_1.$$

$$z_2 = ie^{i0} - 1 = e^{i\frac{\pi}{2}} - 1. \text{ Or On a } 1 - e^{i\alpha} = e^{i0} - e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} \left( e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}} \right) = e^{i\frac{\alpha}{2}} \left( -2i \sin \frac{\alpha}{2} \right). \text{ On pose } \alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } z_2 = - \left( -2i \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = 2i \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$= e^{i\frac{\alpha}{2}} \left[ e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}} \right] = -2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}} = 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0 \forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \Rightarrow z_2 = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}. \text{ Montrons que: } \frac{z_2}{z_1} = i \tan \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2 \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}}{2 \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}} = i \tan \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$b) \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\text{aff}(\overline{OM_2})}{\text{aff}(\overline{OM_1})} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{OM_1} \perp \overline{OM_2} \text{ donc } OM_1 M_2 \text{ est rectangle en } O.$$

$$OM_1 M_2 \text{ est isocèle en } O \Leftrightarrow OM_1 = OM_2;$$

$$\Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ et comme } \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$$

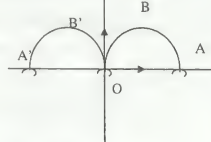
$$\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = 0$$

$$3) a) z_1 = 1 + ie^{i0} = 1 + i \cos \theta - i \sin \theta;$$

$$\begin{cases} x = 1 - \sin \theta \\ y = \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -\sin \theta \\ y = \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = \sin^2 \theta \\ y^2 = \cos^2 \theta \end{cases} \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ c'est est}$$

l'équation d'un cercle  $\mathcal{C}_{(1;0,1)}$ . On a  $-1 < \sin \theta < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \sin \theta < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$  et

$$0 \leq \cos \theta < 1 \Leftrightarrow 0 \leq y < 1 \Leftrightarrow M(x; y) \in \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ 0 < x < 2 \\ 0 \leq y < 1 \end{cases}$$



$M_1$  décrit le demi cercle de diamètre  $[OA]$  situé dans le plan

d'équation  $y \geq 0$  privé des points  $O, A$  et  $B$  avec  $A(2)$  et  $B(1+i)$

$$d) z_1 = 1 + ie^{i0}; z_2 = ie^{i0} - 1. \text{ On a } ie^{i0} = z_1 - 1 \Leftrightarrow z_2 = -1 + z_1 - 1 \Leftrightarrow z_2 = z_1 - 2. \text{ Donc}$$

$$M_2 = \overline{w_1}(M_1) \text{ avec } \overline{w} = -2i; M_2 = \overline{w_1}(M_1)$$

c)  $M_2$  décrit le demi cercle de centre  $I(-1;0)$  et de rayon 1 privé des points  $O, A'$  et  $B'$  situés dans le demi plan d'équation  $y \geq 0$

**Exercice N° 16 :** 1)  $M_1 M_2 M_3$  est équilatéral si  $R \left( M_1, \frac{\pi}{3} \right) (M_2) = M_3 \Leftrightarrow M_1 M_2 = M_1 M_3$  et

$$\left( \overline{M_1 M_2}, \overline{M_1 M_3} \right) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad R \left( M_1, \frac{\pi}{3} \right) (M_2) = M_3 \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \text{ or}$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = -j = -j^2 \text{ d'où}$$

$$(z_3 - z_1) = -j^2 (z_2 - z_1) \Leftrightarrow z_3 - z_1 + j^2 z_2 - j^2 z_1 = 0 \Leftrightarrow -(1+j^2)z_1 + j^2 z_2 + z_3 = 0 \text{ or}$$

$$1+j+j^2 = 0 \Leftrightarrow -(1+j^2) = j \text{ d'où } jz_1 + j^2 z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow j(z_1 + jz_2 + j^2 z_3) = 0 \text{ car } j^2 = 1$$

$$\text{d'où } z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$$

$$R \left( M_1, \frac{\pi}{3} \right) (M_2) = M_3 \Leftrightarrow z_3 - z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_2 - z_1) \Leftrightarrow z_3 - z_1 = -j^2 (z_2 - z_1) \Leftrightarrow j^2 z_1 + z_3 - z_2 - j^2 z_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -jz_1 - z_2 - j^2 z_3 = 0 \Leftrightarrow j(z_1 + j^2 z_2 + jz_3) = 0 \Leftrightarrow z_1 + j^2 z_2 + jz_3 = 0$$

$$2) a) \text{ Soit } P(z) = z^3 - (1+\alpha+i\alpha)z^2 + \alpha(1+i+i\alpha)z - i\alpha^2; P(1) = 1 - (1+\alpha+i\alpha) + \alpha(1+i+i\alpha) - i\alpha^2 = 1 - 1 - \alpha - i\alpha + \alpha + i\alpha^2 - i\alpha^2 = 0$$

$$b) P(z) = (z-1)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b-1)z^2 + (c-b)z - c \text{ d'où}$$

$$b-1 = -1 - \alpha - i\alpha \Leftrightarrow b = -\alpha - i\alpha; P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z^2 - \alpha(1+i)z + i\alpha^2 = 0$$

$$z^2 - \alpha(1+i)z + i\alpha^2 = 0; \Delta = \alpha^2 (1+i)^2 - 4i\alpha^2 = \alpha^2 (1+i)^2 - 4i\alpha^2 = \alpha^2 (1-i)^2;$$

$$z' = \frac{\alpha(1+i) - \alpha(1-i)}{2} = \alpha i \text{ et } z'' = \frac{\alpha(1+i) + \alpha(1-i)}{2} = \alpha \Rightarrow S_C = \{1; \alpha i\}$$

$$c) ABC \text{ est un triangle équilatéral si et seulement si } z_A + jz_B + j^2 z_C = 0 \text{ ou } z_A + j^2 z_B + jz_C = 0$$

$$z_A + jz_B + j^2 z_C = 0 \Leftrightarrow 1 + i\alpha j + \alpha j^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha(j + j^2) = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{j(1+j)}$$

$$z_A + j^2 z_B + jz_C = 0 \Leftrightarrow 1 + j^2 \alpha i + \alpha j = 0 \Leftrightarrow \alpha(j + j^2) = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{j(1+j)}$$

$$\text{de } \alpha \text{ répondant à la question posée sont : } \frac{-1}{j(1+j)} \text{ et } \frac{-1}{j(1+j)}$$

**Exercice N° 17 :**  $(E): iz^2 + 2 \sin \theta z - 2i(1 + \cos \theta) = 0$

$$1) [i(1 + \cos \theta)]^2 = (1 + i \cos \theta)^2 = 1 + 2i \cos \theta - \cos^2 \theta = -2 \cos \theta - 1 - (1 - \sin^2 \theta) = -2 \cos \theta - 2 + \sin^2 \theta$$

$$\Delta' = (\sin \theta)^2 - i(-2i(1 + \cos \theta)) = \sin^2 \theta - 2 - 2 \cos \theta = [i(1 + \cos \theta)]^2$$

$$z_1 = i \sin \theta + 1 + \cos \theta = 1 + e^{i0}, z_2 = -1 - (\cos \theta - i \sin \theta) = -1 - e^{-i0} = -(1 + e^{-i0})$$

$$2) a) z' = (-1 - e^{-i0}) = \left( -e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} \right) = \left( -e^{i\frac{\pi}{2}} \left( e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}} \right) \right)$$

$$= -e^{i\frac{\pi}{2}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} + \cos \left( -\frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\theta}{2} \right) \right) = -e^{i\frac{\pi}{2}} \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \right); z'' = e^{i\frac{\pi}{2}} \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \right);$$

$$z' = \frac{-1 - e^{-i0}}{1 + e^{i0}} = \frac{-2 \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{-e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = -e^{-i0} = e^{i(\pi-0)}$$

$$b) OM^* M' \text{ est isocèle, il suffit de montrer que : } OM' = OM^*; |z_M - z_O| = |z_{M'} - z_O|$$

$$z' = z'' e^{i(\pi-0)} \Rightarrow |z'| = |z''| e^{i(\pi-0)} = |z''| \text{ et par suite } OM^* M' \text{ est isocèle.}$$



$$c) \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(e^{i(\theta-\theta)}) = \arg(1) = 0 \Rightarrow \arg(z') = \arg(z) = \theta \Rightarrow \arg(z') - \arg(z) = 0 \Rightarrow \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = 0$$

Puisque  $OM'M''$  est isocèle en O donc il est équilatéral lorsque

$$\pi - \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \pi - \theta = \frac{\pi}{3} + 2k'\pi \text{ avec } k' \in \mathbb{Z}$$

$$0 < \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{5}{6}; k=0; \pi - \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$0 < \frac{\pi}{3} + 2k'\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k' < \frac{7}{6}; k'=1; \pi - \theta = \frac{\pi}{3} + 2k'\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$OM'M''$  est équilatéral si et seulement si  $\theta \in \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

**Exercice N° 18 :** (E):  $z^2 - (1-i)e^{i\alpha}z - ie^{i2\alpha}$ ;  $\alpha \in [0; \pi]$

$$1) \Delta = (1-i)^2 e^{i2\alpha} + 4ie^{i2\alpha} = -2ie^{i2\alpha} + 4ie^{i2\alpha} = 2ie^{i2\alpha} = 2i(e^{i\alpha})^2$$

$$z' = \frac{(1-i)e^{i\alpha} - (1+i)e^{i\alpha}}{2} = -ie^{i\alpha} = -i \cos \alpha + \sin \alpha \quad z'' = \frac{(1-i)e^{i\alpha} + (1+i)e^{i\alpha}}{2} = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$2) A; M'; M'' \text{ sont alignés } \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM'}; \overrightarrow{AM''}) = 0$$

$$\overrightarrow{AM'} = \begin{pmatrix} \sin \alpha - 1 \\ -\cos \alpha + 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AM''} = \begin{pmatrix} \cos \alpha - 1 \\ \sin \alpha + 1 \end{pmatrix}; \det(\overrightarrow{AM'}; \overrightarrow{AM''}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sin \alpha - 1 & \cos \alpha - 1 \\ -\cos \alpha + 1 & \sin \alpha + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha + 1 - 2 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha \in [0; \pi] \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

**Exercice N° 19 :** (E):  $z^2 - 2(1+i \cos \theta)z + 2i \cos \theta = 0$

$$1) \Delta = 4 \sin^2 \theta \Rightarrow z' = \frac{2(1+i \cos \theta) - 2 \sin \theta}{2} = 1 - \sin \theta + i \cos \theta$$

$$z'' = \frac{2(1+i \cos \theta) + 2 \sin \theta}{2} = 1 + \sin \theta + i \cos \theta$$

$$2) a) z_1 = 1 + ie^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}; \text{ Or } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$z_1 = \left[2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right); \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right]; z_2 = \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right); \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right]$$

$$b) M_1(z_1); z_1 = 1 + ie^{i\theta} = 1 + i(\cos \theta + i \sin \theta) = 1 - \sin \theta + i \cos \theta; z_1 = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sin \theta \\ y = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1; \begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xi: (x-1)^2 + y^2 = 1; \xi_{(A,1)} \text{ avec } A(1;0)$$

$$\text{Or } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \cos \theta < 1 \Leftrightarrow 0 < y < 1; 0 < \sin \theta < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \sin \theta < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1; M_1 \in \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

L'ensemble des points  $M_1$  est un quart du cercle  $\left[\overline{CO}\right] \cap \{C; O\}$  avec  $C(1;1)$  situé dans le demi plan d'équation  $y \geq 0$

$$c) I = M_1 * M_2; z_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1 + ie^{i\theta} + 1 + ie^{-i\theta}}{2} = 1 + i \cos \theta; z_2 = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow I \in \Delta; x = 1$$

tel que  $0 < y < 1$  car  $0 < \cos \theta < 1 \quad \forall \theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . L'ensemble des points I est  $\{AC\} \cap \{C; A\}$  avec

$A(1;0)$  et  $C(1;1)$

$$3) a) \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i2\theta}; A(1); \left|\frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{AM_2}{AM_1} = 1; \arg\left(\frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}\right) = -2\theta[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM_1}; \overrightarrow{AM_2}) = -2\theta[2\pi]$$

$$\begin{cases} AM_2 = AM_1 \\ (\overrightarrow{AM_1}; \overrightarrow{AM_2}) = -2\theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R_{(A; -2\theta)}(M_1) = M_2$$

b)  $AM_1 M_2 S$  est isocèle car  $AM_1 = AM_2$ ;  $AM_1 M_2$  est un triangle rectangle si et seulement si

$$-2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \text{ Or } -\pi < -2\theta < 0 \Rightarrow -2\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ méthode: } \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1} \in i\mathbb{R} \text{ si et seulement si } e^{-i2\theta} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \cos(-2\theta) = 0 \text{ et}$$

$$-\pi < -2\theta < 0 \Rightarrow -2\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$4) a) z_2 - z_1 = 1 + ie^{-i\theta} - (1 + ie^{i\theta}) = i(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) = i(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta) - \cos \theta - i \sin \theta) = 2 \sin \theta$$

$$z_2 - z_1 = 2 \sin \theta \Rightarrow M_1 M_2 = 2 \sin \theta \Rightarrow (M_1 M_2) // (O; \vec{u})$$

$$b) M_2 = S_\theta(M_1); M_1 * M_2 = I \in \Delta \text{ car } z_1 = 1 + i \cos \theta$$

$$\begin{cases} (M_1 M_2) // (O; \vec{u}) \\ \Delta \perp (O; \vec{u}) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (M_1 M_2) \text{ On a: } \begin{cases} \Delta \perp (M_1 M_2) \\ M_1 * M_2 \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta = \text{med}[M_1 M_2] \Rightarrow S_\theta(M_1) = M_2$$

c) Pour que  $OAM_1 M_2$  soit un losange il faut que  $OAM_1 M_2$  soit un parallélogramme et  $OM_1 = OA$ . On a :

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM_1} \Rightarrow z_2 = z_A + z_1 \Leftrightarrow 2 \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad OAM_1 M_2 \text{ est un parallélogramme si et seulement si}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}. \text{ Pour } \theta = \frac{\pi}{6}; z_1 = 1 + ie^{i\frac{\pi}{6}}; z_2 = 1 + ie^{-i\frac{\pi}{6}}; OM_1 = |z_1| = 1 \text{ donc } OAM_1 M_2 \text{ est un losange.}$$

**Exercice N° 20 :** 1)  $iz^2 + (1-d)(1+i)z + d^2 + 1 = 0; \Delta = (1-d)^2(1+i)^2 - 4(d^2 + 1)i = -2i(d+1)^2$

$$= (1-i)^2(d+1)^2 = [(1-i)(d+1)]^2; z_1 = i + d; z_2 = -1 - id$$

$$2) \Delta = \{M \in \mathbb{P} \text{ tel que } OM_1 = OM_2\}; M \in \Delta \Leftrightarrow OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z| = |-1-id|$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2} \Rightarrow \left|\frac{1-i}{\sqrt{2}} - d\right| = \left|\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right| \Leftrightarrow |z| = |d| \Leftrightarrow |z| = |-1-id| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] \text{ avec } A(i) \text{ et } B(-i)$$

et par suite  $\Delta = \text{med}[AB]$

$$3) |d| = 3; M_1(i+d); z_1 - i = d \Leftrightarrow |z_1 - i| = |d| = 3 \Rightarrow M_1 \in \xi_{(A,3)}$$

$$4) \arg(d) = \frac{\pi}{4}[2\pi]; M_2(z_2) \text{ avec } z_2 = -1-id; z_2 + 1 = -id \Leftrightarrow \arg(z_2 + 1) = \arg(-i) = \arg(d)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_2 + 1) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow \arg(z_2 + 1) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{CM_2}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ avec } C(-1)$$

$$\Rightarrow M_2 \in \{Ct\} \cap \{C\} \text{ tel que } (\vec{u}; \overrightarrow{Ct}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$5) a) d \neq i \text{ et } d \neq -i; |d| = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Rightarrow M \in \xi_{(O,1)} = \xi_{(A,1)}; M \in \xi_{(A,1)} \text{ donc } AMB \text{ est rectangle en } M$$

$$b) AMB \text{ est rectangle en } M \text{ et } M \neq A \text{ et } M \neq B; \frac{z_A - z_M}{z_B - z_M} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{i-d}{-1-d} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (-i) \left(\frac{i-d}{-1-d}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+id}{-i-d} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{-1-id}{i+d} \in \mathbb{R}$$

$$6) f_d: M(z) \rightarrow M'(z') \text{ tel que } z' = (d-i\sqrt{3})z + 1$$

$$a) f_d \text{ est une translation si } d-i\sqrt{3} = 1 \Rightarrow d = 1+i\sqrt{3}$$

$$b) h(M) = M' \Leftrightarrow \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} \Rightarrow \frac{1}{2} z = z'$$

$$c) \varphi = f_1 \circ h; M(z) \xrightarrow{h} M'(z') \xrightarrow{f_1} M''(z''); z' = \frac{1}{2} z \text{ et } z'' = (1-i\sqrt{3})z' + 1 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z + 1 \text{ donc } z'' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 1 \text{ et par suite}$$

$$\varphi = R\left(w; -\frac{\pi}{3}\right) \text{ avec } w = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})} = \frac{2(1-i\sqrt{3})}{1 - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \text{ Donc } w = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

**Exercice N° 21 :** 1)  $2) \Delta = [i(b-\bar{b})]^2, z' = 1+ib; z'' = 1+i\bar{b}$

II) 1) a) M appartient au cercle trigonométrique;  $OM = 1$ ;

$$|b| = 1; z_1 = 1+ib \Rightarrow z_1 - 1 = ib \Rightarrow |z_1 - 1| = |ib| = 1; AM_1 = 1 \Leftrightarrow M_1 \in \xi_{(A,1)};$$

$$z_2 = 1+i\bar{b} \Rightarrow z_2 - 1 = i\bar{b} \Rightarrow |z_2 - 1| = |i\bar{b}| = 1; AM_2 = 1 \Leftrightarrow M_2 \in \xi_{(A,1)}$$

$$b) OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |1+ib| = |1+i\bar{b}| = |1+ib| = |1-i\bar{b}| \Leftrightarrow \left|\frac{1}{1+ib}\right| = \left|\frac{1}{1-i\bar{b}}\right|$$

$$|1+ib| = |1-i\bar{b}| \Leftrightarrow |1+ib| = |1-i\bar{b}| \Leftrightarrow |b-i| = |b+i| \text{ Soit } E(i) \text{ et } F(-i)$$

$$|b-i| = |b+i| \Leftrightarrow |z_M - z_E| = |z_M - z_F| \Leftrightarrow ME = MF \Leftrightarrow M \in \text{med}[EF] \Leftrightarrow M \in (O; \vec{u}). \text{ Donc}$$

$$M \in \xi_{(O,1)} \cap (O; \vec{u}) \text{ et par suite } M = L(1) \text{ ou } M = L'(-1) \text{ alors } b = 1 \text{ ou } b = -1$$

$$\bullet \text{ Si } b = 1; z_1^{2006} = (1+i)^{2006} = \left((1+i)^2\right)^{1003} = (2i)^{1003} = 2^{1003} i^{1003} = 2^{1003} i^{(4 \times 250 + 3)} = 2^{1003} i^3 = -2i^{1003}$$

$$\bullet \text{ Si } b = -1; z_1 = -2^{1003} i; z_2 = -i \cdot 2^{1003}; z_1^{2006} = (-1-i)^{2006} = \left((-1-i)^2\right)^{1003} = (-2i)^{1003} = -2i^{1003}$$

2) a)

$$b^{-1} = \frac{\bar{b}-1}{b-1} = \frac{\bar{b}-1-\bar{b}}{b-1-\bar{b}} = -\frac{1}{b}; \text{ aff } \overrightarrow{AM'} = b^{-1} = -\frac{1}{b} = -\frac{b}{bb} = -\frac{1}{|b|^2} b = -\frac{1}{|b|^2} \text{ aff } \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = -\frac{1}{|b|^2} \overrightarrow{OM}$$

et comme  $-\frac{1}{|b|^2} < 0$ ;  $\overrightarrow{AM'}$  et  $\overrightarrow{OM}$  sont colinéaires de sens contraire.

b)  $M \in \xi_{(O,1)} \cap \{A\} \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow |b| = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AM'} = 1 \Rightarrow M' \in \xi_{(A,1)}$  et comme  $\overrightarrow{AM'}$  et  $\overrightarrow{OM}$  sont colinéaires de sens contraire,  $M' \in \xi_{(A,1)} \cap \{At\} \text{ avec } \overrightarrow{(At; OM)} = \pi[2\pi]$ . Faire une figure.

**Exercice N° 22 :** D)  $z^2 - i(2-e^{i\alpha})z + e^{i\alpha} - 1 = 0$

$$1) \Delta = [i(2-e^{i\alpha})]^2 - 4(e^{i\alpha} - 1) = -2e^{i\alpha} - 4e^{i\alpha} + 4 = -4 + 4e^{i\alpha} - e^{i2\alpha} - 4e^{i\alpha} + 4 = -e^{i2\alpha} = (ie^{i\alpha})^2$$

$$z_1 = \frac{2i - ie^{i\alpha} - ie^{i\alpha}}{2} = i - ie^{i\alpha}; z_2 = \frac{2i - ie^{i\alpha} + ie^{i\alpha}}{2} = i$$

$$2) z_1 = i - ie^{i\alpha} = i(1 - e^{i\alpha}) = i(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{3\alpha}{2}}) = i \left[ e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{3\alpha}{2}} \right] = i \left[ e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\alpha} \right] = 2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Or } 0 < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} > 0 \Rightarrow z_1 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}; z_2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{II) } z' = \frac{\bar{z}-i}{z+i} \quad 1) a) \text{ Soit } M \text{ un point}$$

$$\text{invariant; } f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{\bar{z}-i}{z+i} \Leftrightarrow z\bar{z} + iz = \bar{z} - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y + i(x+y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ix - y = x - iy - i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - y - x = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = y + x \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = -1 \\ x + y = -1 \end{cases} \text{ Impossible;}$$

donc il n'existe aucun point invariant.

$$b) z' - 1 = \frac{\bar{z}-i}{z+i} - 1 = \frac{-2i}{z+i} \Leftrightarrow |z' - 1| = \frac{2}{|z+i|} \Leftrightarrow |z' - 1| |z+i| = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AM'} \overrightarrow{BM} = 2$$

$$\arg(z' - 1) = \arg\left(\frac{-2i}{z+i}\right) = \arg(-2i) - \arg(z+i) = -\frac{\pi}{2} + \arg(\overline{z+i}) = -\frac{\pi}{2} + \arg(\overline{z-i})[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = -\frac{\pi}{2} + (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) - (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$



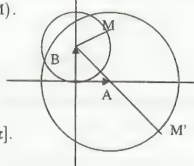
$$\Rightarrow (\overline{BM}; \overline{AM}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

c)  $M \in \xi_{(B,1)} \Leftrightarrow BM=1 \Leftrightarrow AM'BM=2 \Leftrightarrow AM'=2$ ;  $M' \in \xi'_{(A,2)}$ . Or  $(\overline{BM}; \overline{AM'}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  donc  $M'$  est le point d'intersection de  $\xi'_{(A,2)}$  et la droite qui passe par A et  $\perp (BM)$ .

**Etape de construction :**

- On marque un point M sur  $\xi_{(B,1)}$ .
- On trace le cercle  $\xi'_{(A,2)}$ .
- On trace la droite  $\Delta \perp (BM)$  en A.  $\Delta$  coupe  $\xi'_{(A,2)}$

en deux points et on prend le point tel que  $(\overline{BM}; \overline{AM'}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .



$$2) a) (\bar{z}-i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(\bar{z}+i)^3; |\bar{z}-i|^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}|1+i||\bar{z}+i|^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}|z+i|^3 \Leftrightarrow |\bar{z}-i|^3 = |z+i|^3 \\ \Leftrightarrow |\bar{z}-i| = |z+i| \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow CM=CB \text{ avec } C(-i) \Leftrightarrow M \in \text{med}[CB] \Leftrightarrow M \in (O; \overline{OA}) \text{ } z \text{ est réel.}$$

$$b) z' = e^{i\alpha} \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = e^{i\alpha} \Leftrightarrow \frac{z-i}{z-i} = e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z+i = (z-i)e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z+i = ze^{-i\alpha} - ie^{-i\alpha} \\ \Leftrightarrow z(1-e^{-i\alpha}) = -i(1+e^{-i\alpha}) \text{ Or } \alpha \in ]0; 2\pi[ \Rightarrow \alpha \neq 2k\pi \text{ et par suite } e^{-i\alpha} \neq 1.$$

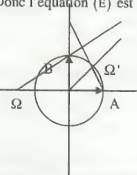
$$z = \frac{-i(1+e^{-i\alpha})}{(1-e^{-i\alpha})} = -i \left( \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} \right) = -i \left( \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} \right) \\ = -i \left( \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}} \right) = -i \left( \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} \right) = -\cot g \frac{\alpha}{2}.$$

c) (E):  $(\bar{z}-i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(\bar{z}+i)^3$ .  $i$  n'est pas une solution de l'équation car :

$$(i-i)^3 = (-2i)^3 \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(i+i)^3 = 0. \text{ Donc } z \neq i \Leftrightarrow \bar{z} \neq -i \Leftrightarrow (z+i) \neq 0. \text{ Donc l'équation (E) est}$$

$$\text{équivalent à : } \left( \frac{\bar{z}-i}{z+i} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}) = e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow (z')^3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

**Rappel :**  $z^n = a$  avec  $a \in [a], \theta]$  :  $z = \sqrt[n]{|a|} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ;  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$



$$z' = e^{i\frac{3\pi+2k\pi}{4}} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2\}; z' = e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z' = e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ ou } z' = e^{i\frac{9\pi}{4}}$$

$$\text{D'après 2) b) : } z = -\cot g \frac{\pi}{8} \text{ ou } z = -\cot g \frac{11\pi}{24} \text{ ou } z = -\cot g \frac{19\pi}{24}$$

$$d) w' = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}; f(\Omega) = \Omega'; \text{ d'après 1) : } (\overline{BQ}; \overline{AQ'}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow (BQ) \perp (AQ') \bullet$$

$$\text{et d'après 2) a) ; } w' = e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow w = -\cot g \frac{\pi}{8} \Rightarrow \Omega \in (O; \overline{OA}) \bullet$$

d'après 1 et 2  $\Omega$  est l'intersection de  $(O; \overline{OA})$  et la perpendiculaire à  $(AQ')$  passant par B.

**Exercice N° 23 :**

$$1) a) |z|=|z-2i| \Leftrightarrow |z|^2 = |z-2i|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = (z-2i)(\bar{z}-2i) \Leftrightarrow z\bar{z} = z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 2i(z-\bar{z}) + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow 2i(2i \operatorname{Im}(z)) + 4 = 0 \Leftrightarrow -4 \operatorname{Im}(z) + 4 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow M(z) \in \Delta : y = 1$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} (u; \overline{OM}) = \theta [2\pi]; 0 < \theta < \pi \\ M(z) \in \Delta : y = 1 \end{array} \right. \text{ Donc } \operatorname{Im}(z) = |z| \sin \theta = 1 \Rightarrow |z| = \frac{1}{\sin \theta};$$

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{1}{\sin \theta}(\cos \theta + i \sin \theta) = \cot g \theta + i$$

$$2) n \in \mathbb{N}^+; n \geq 2; E : z^n = (z-2i)^n.$$

$$a) z \text{ est une solution de (E)} \Leftrightarrow z^n = (z-2i)^n \Rightarrow |z|^n = |(z-2i)|^n \Leftrightarrow |z| = |z-2i| \text{ donc } M(z) \in \Delta$$

$$b) \frac{z}{z-2i} = e^{i\alpha}; \alpha \neq 2k\pi \Leftrightarrow (z-2i)e^{i\alpha} = z \Leftrightarrow z(e^{i\alpha} - 1) = 2ie^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2ie^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{2ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})} = \frac{2ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \cot g \frac{\alpha}{2} + i$$

On peut retrouver 2) b) sur les images des solutions d'ordonnées 1 donc ils sont situés sur  $\Delta : y = 1$ .

$$c) z^n = (z-2i)^n \Leftrightarrow \left( \frac{z}{z-2i} \right)^n = 1; z \neq 2i \text{ Donc } \frac{z}{z-2i} \text{ est une racine } n^{\text{ème}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{z-2i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}; k \in \{1; 2; \dots; n-1\} \text{ pour } k=0 \text{ On a } \frac{z}{z-2i} = e^0 = 1 \text{ impossible}$$

$$\Leftrightarrow z = z_k = \cot g \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i; k \in \{1; 2; \dots; n-1\} \Leftrightarrow z = z_k = \cot g \left( \frac{k\pi}{n} \right) + i; k \in \{1; 2; \dots; n-1\}$$

$$3) \text{ Rappel : } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$a) z^n = (z-2i)^n \Leftrightarrow z^n = (z+(-2i))^n \Leftrightarrow z^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (-2i)^k \Leftrightarrow z^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (-2i)^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (-2i)^k \\ \Leftrightarrow z^n = 1 \times z^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (-2i)^k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (-2i)^k = 0 \neq$$

$$b) \text{ L'équation (E) est équivalent à : } \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (-2i)^k = 0 \text{ On pose}$$

$$P_{(n-1)}(z) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (-2i)^k \Rightarrow P_{(n-1)}(z) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2i)^k z^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2i)^k z^{n-k}$$

D'autre part les nombres  $z_k = \cot g \left( \frac{k\pi}{n} \right) + i$  sont des solutions de (E) et par suite

$$\forall z \in \mathbb{C}; P_{(n-1)}(z) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2i)^k (z - z_k) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2i)^k (z - z_k)(z - z_k) \dots (z - z_{n-1})$$

$$\text{Pour } z = 0; P_{(n-1)}(0) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2i)^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2i)^k (-z_1)(-z_2) \dots (-z_{n-1}) \text{ d'où}$$

$$(-2i)^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-z_1)(-z_2) \dots (-z_{n-1}) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2i)^k (-z_1)(-z_2) \dots (-z_{n-1}) = (-2i)^n$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{n-1} (2i)^n z_1 z_2 \dots z_{n-1} = (-2i)^n \Leftrightarrow (-1)^{n-1} (2i)^n z_1 z_2 \dots z_{n-1} = (-1)^n (2i)^n \Leftrightarrow z_1 z_2 \dots z_{n-1} = \frac{(2i)^{n-1}}{n}$$

$$c) z_1 z_2 \dots z_{n-1} = \frac{(2i)^{n-1}}{n} \Rightarrow |z_1 z_2 \dots z_{n-1}| = \left| \frac{(2i)^{n-1}}{n} \right| \Rightarrow |z_1| |z_2| \dots |z_{n-1}| = \frac{|2i|^{n-1}}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left| \cot g \left( \frac{\pi}{n} \right) + i \right| \left| \cot g \left( \frac{2\pi}{n} \right) + i \right| \dots \left| \cot g \left( \frac{(n-1)\pi}{n} \right) + i \right| = \frac{2^{n-1}}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{n} \right)} \cdot \frac{1}{\sin \left( \frac{2\pi}{n} \right)} \dots \frac{1}{\sin \left( \frac{(n-1)\pi}{n} \right)} = \frac{2^{n-1}}{n}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) \dots \sin \left( \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$4) a) U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{n+1-2n}{2^n} = \frac{1-n}{2^n} \leq 0. \text{ Donc } U_{n+1} \leq U_n \text{ et la suite } (U_n) \text{ est décroissante}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+ / \{1\}; U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$  est majorée par 0.

$$b) U_{n+1} = \frac{n+1}{2^n} = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left( \frac{n}{2^{n-1}} \right) + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2^n} \text{ Comme } (U_n) \text{ est décroissante et majorée donc elle est}$$

convergente. Soit  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$ ; comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} l$ ;

$$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2^n} \text{ alors } l = \frac{1}{2} l \Rightarrow l = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$\text{Exercice N° 24 : 1) } z, z_3 = \frac{c}{a} = 2 \sin^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta = -2i \sin \theta (\cos \theta + i \sin \theta) = 2 \sin \theta e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\theta} = 2 \sin \theta e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$$

$$0 < \theta < \pi \Rightarrow \sin \theta > 0 \Rightarrow |z, z_3| = 2 \sin \theta \text{ et } \arg(z, z_3) = \theta - \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$2) \Delta' = 1 - 2 \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$z_1 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta; z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$$

$$3) z_1 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$0 < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\theta}{2} > 0 \Rightarrow |z_1| = 2 \cos \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z_1 = \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

$$\arg(z_2) = \theta - \frac{\pi}{2} - \arg(z_1) [2\pi] \equiv \theta - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} [2\pi] \equiv \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

$$|z_1 z_2| = 2 \sin \theta \text{ et } |z_1| = 2 \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow |z_2| = \frac{2 \sin \theta}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \times 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

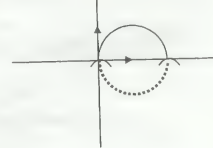
$$\text{D'où } z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$4) M_1(z_1) \text{ et } M_2(z_2). z_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = 1 \text{ Pour } z_1 = x + iy \text{ } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R};$$

$$E_1 = \{ M_1(z); z = z_1 \text{ et } \theta \in ]0; \pi[ \} M(x; y) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -\cos \theta \\ y = \sin \theta \\ 0 < \theta < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ 0 < x < 2 \\ 0 < y \leq 1 \end{cases} \text{ Donc } E_1 \text{ est un demi cercle de centre } I(1; 0) \text{ et de rayon } 1.$$

$E_2 = \{ M_2(z_2); z_2 = 1 + \cos \theta - i \sin \theta; \theta \in ]0; \pi[ \}; I = M_1 * M_2 \Leftrightarrow M_2 = S_1(M_1)$ . Lorsque  $M_1$  décrit l'ensemble  $E_1$  alors  $M_2$  décrit l'image de  $E_1$  par  $S_1$  qui aussi un demi cercle.





$$5) z'_1 = \frac{1}{z_1}; \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} - 1 \right) \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} + 1 \right) = \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} \right)^2 - 1 = \frac{z_1^2 + z_1'^2 + 2z_1 z'_1}{4} - 1$$

$$= \frac{z_1^2 + z_1'^2 + 2z_1 z'_1 - 4}{4} = \frac{z_1^2 + z_1'^2 + 2z_1 z'_1 - 4z_1 z'_1}{4} \text{ car } z_1 z'_1 = 1.$$

$$\text{Donc } \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} - 1 \right) \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} + 1 \right) = \frac{z_1^2 + z_1'^2 - 2z_1 z'_1}{4} = \left( \frac{z_1 - z'_1}{2} \right)^2$$

$$b) K = M_1 * M'_1 \Rightarrow z_K = \frac{z_1 + z'_1}{2}; \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} - 1 \right) \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} + 1 \right) = \left( \frac{z_1 - z'_1}{2} \right)^2 \text{ Donc}$$

$$\arg \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} - 1 \right) \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} + 1 \right) \equiv \arg \left( \frac{z_1 - z'_1}{2} \right)^2 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} - 1 \right) + \arg \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} + 1 \right) \equiv 2 \arg \left( \frac{z_1 - z'_1}{2} \right) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} - 1 \right) + \arg \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} + 1 \right) \equiv 2 \arg \left( \frac{z_1 - z'_1}{2} \right) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} - 1 \right) + \arg \left( \frac{z_1 + z'_1}{2} + 1 \right) \equiv 2 \arg \left( \frac{z_1 - z'_1}{2} \right) [2\pi]$$

$$\text{Donc } \overline{M_1 M'_1} \text{ est un vecteur directeur d'une bissectrice du secteur } [KA; KB].$$

**Exercice N° 25 : 1)**  $z^3 = a = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  donc les solutions sont les nombres complexes

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}; \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}; z_0 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; z_1 = i; z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z^3 = -2 + 2i = 2\sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = (\sqrt{2})^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ donc les solutions sont les nombres complexes}$$

$$z_k = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0, 1, 2\}; z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}; z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}; z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}; z_0 = 1 + i; z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$= \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{19\pi}{12}} = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{17\pi}{6}} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{17\pi}{6} + i \sin \frac{17\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

II) 1)  $z$  est solution de  $E \Leftrightarrow z^3 - 6iz^2 - 3(3+i)z - 4 + i = 0$

$$\Leftrightarrow (z^3 + 2i) - 6i(z^2 + 2i) - 3(3+i)(z^2 + 2i) - 4 + i = 0 \Leftrightarrow z^3 + 6iz^2 - 12z^2 - 8i - 6iz^2 + 24z^2 + 24i - 9z^2 - 18i - 3iz^2 + 6 - 4 + i = 0 \Leftrightarrow z^3 + 3(1-i)z^2 + 2 - i = 0. \text{ Donc } z' \text{ est une solution de } E': z^3 + 3(1-i)z^2 + 2 - i = 0$$

2) a)  $z'$  est une solution de  $E \Leftrightarrow (u+v)^3 + 3(1-i)(u+v) + 2 - i = 0$  et  $uv = -1 + i$

$$\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 3(1-i)(u+v) + 2 - i = 0 \text{ et } uv = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3(u+v)uv + 3(1-i)(u+v) + 2 - i = 0 \text{ et } uv = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3(u+v)uv + 3(1-i)(u+v) + 2 - i = 0 \text{ et } uv = -1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -2 + i \\ uv = -1 + i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -2 + i \\ u^3 v^3 = (-1 + i)^3 = 2(1 + i) \end{cases} \text{ Donc } u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont des solutions de l'équation } (E''): X^2 + (2-i)X + 2(1+i) = 0$$

$$3) a) \Delta = (2-i)^2 - 4(2+i) = -5 - 12i = (2-3i)^2 \text{ donc } X_1 = -i \text{ et } X_2 = -2 + 2i$$

b)  $u^3$  et  $v^3$  sont des solutions de l'équation

$$(E'') \Leftrightarrow (u^3, v^3) = (-i; -2 + 2i) \text{ ou } (u^3, v^3) = (-2 + 2i; -i) \text{ alors } u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont les racines cubiques de } a \text{ et } b \text{ et } z' \text{ est solution de } E'$$

Or d'après 2), On a :

$$\begin{cases} u + v = z' \\ uv = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases}$$

$X$	$e^{i\frac{\pi}{6}}$	$e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$e^{i\frac{7\pi}{6}}$
$\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$	$\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$	$\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$
$\sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}$	$\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$	$\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$
$\sqrt{2} e^{i\frac{19\pi}{12}}$	$\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$	$\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$	$\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$z' = e^{i\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = i + 1 + i = 1 + 2i \text{ ou } z' = e^{-i\frac{\pi}{6}} + \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}} = -\frac{1}{2} + i \left( \frac{\sqrt{3}-2}{2} \right) \text{ ou}$$

$$z' = e^{i\frac{7\pi}{6}} + \sqrt{2} e^{i\frac{19\pi}{12}} = -\frac{1}{2} + i \left( -\frac{\sqrt{3}-2}{2} \right) \text{ donc les solutions de } (E) \text{ sont : } 1 + 2i + 2i = 1 + 4i, -\frac{1}{2} + i \left( \frac{\sqrt{3}-2}{2} \right) + 2i$$

$$\text{et } -\frac{1}{2} + i \left( -\frac{\sqrt{3}-2}{2} \right) + 2i$$

**Exercice N° 26 :** Si  $u = -1$  alors  $A = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Supposons  $u \neq -1$  alors

$$(1+u)A = 1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + \dots + (-1)^{n-1} n u^{n-1} + u - 2u^2 + 3u^3 + \dots + (-1)^{n-2} (n-1) u^{n-1} + (-1)^{n-1} n u^n$$

$$\text{Donc } (1+u)A = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^{n-1} u^{n-1} + (-1)^n n u^n. \text{ En outre}$$

$$1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^{n-1} u^{n-1} = 1 + (-u) + (-u)^2 + (-u)^3 + \dots + (-1)^{n-1} (-u)^{n-1} = \frac{1 - (-u)^n}{1 - (-u)}$$

D'où  $(1+u)A = \frac{1 - (-1)^n u^n}{1+u} + (-1)^{n-1} n u^{n-1}$ . or  $U^n = 1$  car  $U$  est une racine  $n^{\text{ème}}$  de l'unité. Donc

$$A = \frac{1 - (-1)^n}{(1+u)^2} + \frac{n(-1)^{n-1}}{1+u} \text{ Et par suite } A = \frac{-n}{1+u} \text{ si } n \text{ pair et } A = \frac{2}{(1+u)^2} + \frac{n}{1+u} \text{ si } n \text{ impair.}$$

**Exercice N° 27 :** On a :  $p(1) \neq 0$ ;  $p(z) = 0 \Rightarrow z - 1 \neq 0$  et  $(z-1)(p(z)) = 0 \Rightarrow z - 1 \neq 0$  et  $z^5 - 1 = 0$  d'où

les racines de  $p$  sont :  $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ ;  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}; z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}; z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{-i\frac{4\pi}{5}}; z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} \text{ Donc } S_C = \left\{ e^{i\frac{2\pi}{5}}; e^{-i\frac{2\pi}{5}}; e^{-i\frac{4\pi}{5}}; e^{i\frac{4\pi}{5}} \right\}$$

$$P(z) = \left[ \left( z - e^{-i\frac{2\pi}{5}} \right) \left( z - e^{i\frac{2\pi}{5}} \right) \left( z - e^{-i\frac{4\pi}{5}} \right) \left( z - e^{i\frac{4\pi}{5}} \right) \right] = \left( z^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} z + 1 \right) \left( z^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} z + 1 \right)$$

$$2) \text{ On pose } a = \cos \frac{2\pi}{5} \text{ et } b = \cos \frac{4\pi}{5}; P(z) = z^4 - 2(a+b)z^3 + 2(1+2ab)z^2 - 2(a+b)z + 1 \text{ Or}$$

$$P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \text{ d'où } -2(a+b) = 1; 2(1+2ab) = 1; -2(a+b) = 1 \Leftrightarrow a+b = -\frac{1}{2} \text{ et } ab = -\frac{1}{4}$$

$$\text{et par suite } a \text{ et } b \text{ sont les racines de l'équation } 4z^2 + 2z - 1 = 0 \Delta' = 5; z' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; z'' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Or } a = \cos \frac{2\pi}{5} > 0 \text{ car } 0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \text{ et } b = \cos \frac{4\pi}{5} < 0 \text{ car } \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi \text{ Donc } \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{et } \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

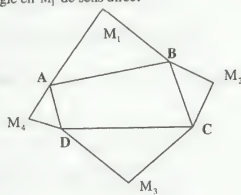
**Exercice N° 28 : 1)** Le triangle  $M_1 AB$  est isocèle rectangle en  $M_1$  de sens direct

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_1 A = M_1 B \\ \arg \left( \frac{M_1 A}{M_1 B} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{M_1 A}{M_1 B} = 1 \\ \arg \left( \frac{M_1 A}{M_1 B} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M_1 A}{M_1 B} = 1 \\ \arg \left( \frac{z_1 - b}{z_1 - a} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1 - b}{z_1 - a} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{z_1 - b}{z_1 - a} = i \Leftrightarrow z_1 = \frac{b - ia}{1 - i}$$

$$\text{De même on montre que } z_2 = \frac{c - ib}{1 - i}; z_3 = \frac{d - ic}{1 - i} \text{ et } z_4 = \frac{a - id}{1 - i}$$



$$2) a) \left( \frac{M_1 M_4}{M_2 M_3} \right) = \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_2} = \arg \left( \frac{d - ic - b + ia}{a - id - c + ib} \right) [2\pi] \equiv \arg \left( \frac{d - b + i(a - c)}{a - c + i(b - d)} \right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg \left( i \frac{a - c + i(b - d)}{a - c + i(b - d)} \right) [2\pi] \equiv \arg(i) [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$b) \frac{M_1 M_3}{M_2 M_4} = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{i(d - ic - b + ia)}{a - id - c + ib} = i \text{ Donc } M_1 M_3 = M_2 M_4$$

**Exercice N° 29 : 1)** ABC est un triangle équilatéral de sens direct, si et seulement si,

$$\left( \frac{AB}{AC} \right) = \frac{AB}{AC} = 1 \Leftrightarrow \left( \frac{AB}{AC} \right) = \frac{c - a}{b - a} = 1 \Leftrightarrow \frac{c - a}{b - a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c - a = e^{i\frac{\pi}{3}} (b - a)$$

Donc ABC est un triangle équilatéral de sens direct

2) ABC est un triangle équilatéral de sens indirect, si et seulement si,

$$\left( \frac{AB}{AC} \right) = \frac{AB}{AC} = 1 \Leftrightarrow \left( \frac{AB}{AC} \right) = \frac{c - a}{b - a} = 1 \Leftrightarrow \frac{c - a}{b - a} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}} (b - a)$$

$$\frac{c - a}{b - a} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}} (b - a). \text{ Donc ABC est un triangle équilatéral de sens indirect}$$

3) ABC est un triangle équilatéral, si et seulement si,  $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}} (b - a)$  ou  $c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}} (b - a)$

$$\left[ (c - a) - e^{i\frac{\pi}{3}} (b - a) \right] \left[ (c - a) - e^{-i\frac{\pi}{3}} (b - a) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - a)^2 - (c - a)(b - a)e^{-i\frac{\pi}{3}} - (b - a)(c - a)e^{i\frac{\pi}{3}} + (b - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - a)^2 - (c - a)(b - a)\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) + (b - a)^2 = 0 \Leftrightarrow (c - a)^2 - (c - a)(b - a) + (b - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 2ac + a^2 + b^2 + ab - a^2 + b^2 - 2ab + a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

**Exercice N° 30 : 1)**  $z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1-i)e^{2i\theta} = 0$ ;  $\Delta' = -e^{2i\theta} + 4(1-i)e^{2i\theta} = e^{2i\theta}(3-4i) = [(2-i)e^{i\theta}]^2$

$$z' = ie^{i\theta} + (2-i)e^{i\theta} = 2e^{i\theta}; z'' = ie^{i\theta} - (2-i)e^{i\theta} = -2(1-i)e^{i\theta}$$

$$S_C = \{2e^{i\theta}, -2(1-i)e^{i\theta}\}.$$

$$2) a) \text{ Soit } \Gamma = \{M(z); z' = 2e^{i\theta}; \theta \in [0; \frac{\pi}{2}]\}$$

$$M' \in \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} |z_M| = 2 \\ \arg(z_M) = \theta [2\pi]; \theta \in [0; \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow OM' = 2 \text{ et } \left( \overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'} \right) = \theta [2\pi]; \theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$$



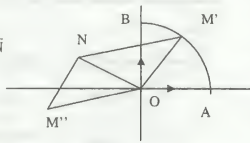
Donc  $\Gamma$  est l'arc  $\widehat{AB}$  du cercle  $\mathcal{C}_{(O,2)}$  avec  $A(1)$  et  $B(i)$

b)  $R_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}(N) = N \Rightarrow z_N = 2ie^{i\theta}$

c)  $z_{OM} = 2e^{i\theta}$  et  $z_{M''N} = 2ie^{i\theta} - 2ie^{i\theta} + 2e^{i\theta} = 2e^{i\theta} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M''N}$   
 $\Rightarrow OM'NM''$  est un parallélogramme

d) On a  $M' \in \Gamma \Leftrightarrow N = r_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}(M')$  et  $M'' = t_{M'O}(N)$  car

$OM'NM''$  est un parallélogramme  $\Rightarrow M'' = t_{M'O} \circ r_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}(M')$



3) a) On a  $(-2+2i)e^{i\theta} = \left[2\sqrt{2}; \theta + \frac{3\pi}{4}\right] = z_M$ . Les racines

cubiques de  $z_M$ , sont les  $z_k = \left[\sqrt{2}; \frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right]; k \in \{0; 1; 2\}$ .

b) Soit  $\alpha \in ]0; 2\pi[; \frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{i\alpha} \Leftrightarrow \sqrt{2}z-1 = \sqrt{2}e^{i\alpha}z \Leftrightarrow (\sqrt{2}-\sqrt{2}e^{i\alpha})z = 1$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}(1-e^{i\alpha})} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}})} \Leftrightarrow z = \frac{1}{-2\sqrt{2}i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}} \Leftrightarrow z = \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{-2\sqrt{2}i \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2}}{-2\sqrt{2}i \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{-i \sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2}}{-2\sqrt{2}i \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + i \cot g \frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + i \cot g \left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

c) On remarque que  $z=0$  n'est pas une solution de l'équation ( $E_3$ )

( $E_3$ )  $\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}z-1}{z}\right)^3 = (-2+2i)e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \left[\sqrt{2}; \frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right]; k \in \{0; 1; 2\}$

$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + i \cot g \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right); k \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow z_k = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + i \cot g \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + i \cot g \left(\frac{\theta}{3} + \frac{11\pi}{24}\right)\right)$  et  $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + i \cot g \left(\frac{\theta}{3} + \frac{19\pi}{24}\right)\right)$  Donc  $S_C = \{z_0; z_1; z_2\}$ .

\*\*\*\*\*  
 SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE I  
 \*\*\*\*\*

Exercice 1: 1) Faux : car  $S_A \circ S_B = id_P$

2) Faux : car l'identité fixe deux points distincts; donc une isométrie qui fixe deux points distincts alors f soit une symétrie orthogonale soit l'identité.

3) Vrai :  $O \in \Delta_1 \cap \Delta_2$  alors  $f(O) \in f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2)$ , comme  $f(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \Delta_1 \cup \Delta_2$  alors  $f(O) \in \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{O\}$ ,  $f(O) = O$

4) Faux : une isométrie qui fixe un point A alors soit l'identité soit une symétrie orthogonale d'axe passant par A, soit une rotation de centre A

5) Vrai :  $M_1$  et  $M_2$  deux points du plan tel que  $f(M_1) = M'_1$  et  $f(M_2) = M'_2$

$M'_1 M'_2 = |(iz_2 + 2) - (iz_1 + 2)| = |i(z_2 - z_1)| = |z_2 - z_1| = M_1 M_2$

conservé les distances donc f est une isométrie  
 6) Vrai (théorème du cour).

7) Vrai  $t_{AC} \circ f = S_{(U)}$  alors  $t_{AC} \circ t_{AC} \circ f = t_{AC} \circ S_{(U)}$ ,  $id_P \circ f = t_{AC} \circ S_{(U)}$ ;  $f = t_{AC} \circ S_{(U)}$ , et  $\overrightarrow{CA}$  un vecteur directeur de (U) alors f est une symétrie glissante.

8) Faux, contre exemple : dans le triangle ABC de question 7)

On a  $t_{BC} \circ S_{(BC)} = S_{(O)} \circ S_{(BC)} = S_{(O)}$  symétrie orthogonale.

Exercice 2: 1) a) et b) ; 2) c) et d) ; 3) a) et c) ; 4) a) ; 5) (i); c) (ii); a) ; 6) b); 7) b) ; 8) c)

Exercice 3: 1) a) Soit G le centre de gravité du triangle ABC

alors  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ , comme l'isométrie conserve l'équipollence des binômes alors

$f(\overrightarrow{GA}) + f(\overrightarrow{GB}) + f(\overrightarrow{GC}) = \vec{0}$  or  $\{f(A), f(B), f(C)\} = \{A, B, C\}$

donc  $f(G)A + f(G)B + f(G)C = \vec{0}$ , donc f(G) le centre de gravité

du triangle ABC d'où f(G) = G car G est unique.

b) Si f(A) = A et comme f(G) = G alors f = id\_P ou f =  $S_{(AG)}$ . Si f = id\_P

alors f(B) = B et f(C) = C donc f(ABC) = ABC d'où f laisse invariant ABC.

Si f =  $S_{(AG)}$  alors f(B) = C et f(C) = B donc f laisse invariant ABC.

c) Supposons que f(A) = B, on a f(G) = G donc f admet un point invariant G et f  $\neq id_P$  d'où f soit une

rotation de centre G et d'angle  $\widehat{(GA, GB)} \equiv 2\widehat{(CA, CB)} [2\pi] = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$  ou f =  $S_A$  avec  $\Delta = \text{méd}(AB)$ ,  $\Delta$

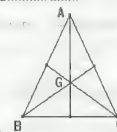
= (CG)

vérifier que  $R_{\left(\frac{2\pi}{3}, G\right)}$  et  $S_{(CG)}$  laissent invariant le triangle ABC. Supposons que f(A) = C même méthode

que b) on démontre que  $f = S_{(CB)}$  ou  $f = R_{\left(\frac{2\pi}{3}, G\right)}$

Conclusion: les isométries laissant invariant ABC sont:

$id_P; R_{\left(\frac{2\pi}{3}, G\right)}; R_{\left(\frac{2\pi}{3}, G\right)}; S_{(AG)}; S_{(GB)} \text{ et } S_{(GC)}$



2) a)  $g = S_{(AC)} \circ h$ , h transforme le triangle ABC en le triangle ACD donc  $h(\{A, B, C\}) = \{A, C, D\}$

on a:  $S_{(AC)}(\{A, C, D\}) = \{A, C, B\}$ ;  $g(\{A, B, C\}) = S_{(AC)} \circ h(\{A, B, C\}) = \{A, C, B\}$  Donc g laisse

invariant le triangle ABC. D'après 1) on a:  $g \in \left\{id_P; R_{\left(\frac{2\pi}{3}, A\right)}; R_{\left(\frac{2\pi}{3}, A\right)}; S_{(AC)}; S_{(BC)}; S_{(CC)}\right\}$

b)  $h \in \left\{S_{(AC)}; S_{(AC)} \circ R_{\left(\frac{2\pi}{3}, A\right)}; S_{(AC)} \circ R_{\left(\frac{2\pi}{3}, A\right)}; S_{(AC)} \circ S_{(AC)}; S_{(AC)} \circ S_{(BC)}; S_{(AC)} \circ S_{(CC)}\right\}$

Exercice 4: O = A \* C donc  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ , O = B \* D donc  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$  comme l'isométrie conserve

l'équipollence des bipoints alors:  $f(\overrightarrow{OA}) + f(\overrightarrow{OB}) + f(\overrightarrow{OC}) + f(\overrightarrow{OD}) = \vec{0}$

Et comme  $\{f(A), f(B), f(C), f(D)\} = \{A, B, C, D\}$  donc  $f(\overrightarrow{OA}) + f(\overrightarrow{OB}) + f(\overrightarrow{OC}) + f(\overrightarrow{OD}) = \vec{0}$

$f(\overrightarrow{OA}) + f(\overrightarrow{OB}) + f(\overrightarrow{OC}) + f(\overrightarrow{OD}) = 4f(\overrightarrow{OO}) = 4\overrightarrow{OO} = \vec{0}$  et comme

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$  d'où  $4f(\overrightarrow{OO}) = \vec{0}$  alors f(O) = O.

2) a) on pose f(A) = A', on a f(O) = O donc OA' = OA. Comme OA  $\neq OB$  car ABCD non réduit à un carré donc OA'  $\neq OB \Rightarrow A' \neq B$  d'où f(A)  $\neq B$  De même on montre que f(A)  $\neq D$ .

Conclusion: f(A)  $\notin \{B, D\}$ .

3) a) f(A) = C;  $S_{(BD)} \circ f(A) = S_{(BD)} \circ f(A) = S_{(BD)}(C) = A$ ;

$S_{(BD)} \circ f(O) = S_{(BD)}(O) = O$ ;

$S_{(BD)} \circ f$  est une isométrie qui fixe 2 points distincts A et O donc

$S_{(BD)} \circ f = id_P$  ou  $S_{(BD)} \circ f = S_{(AO)}$ .

b)  $S_{(BD)} \circ f = id_P$  donc  $f = S_{(BD)}$ ,  $S_{(BD)} \circ f = S_{(AO)} \Rightarrow f = S_{(BD)} \circ S_{(AO)} = S_O$

car  $(BD) \cap (AO) = \{O\}$  et  $(AO) \perp (BD)$  enfin  $f = S_{(BD)}$  où  $f = S_O$

4) f(A) = A alors  $S_{(AC)} \circ f(A) = S_{(AC)}(A) = A$  et on a

$S_{(AC)} \circ f(O) = S_{(AC)}(O) = O$  donc fixe deux points distincts O et A donc  $S_{(AC)} \circ f = id_P$  ou

$S_{(AC)} \circ f = S_{(AO)}$ ;  $S_{(AC)} \circ f = id_P$  donc  $f = S_{(AC)}$ ;  $S_{(AC)} \circ f = S_{(AO)}$  donc  $f = S_{(AC)} \circ S_{(AO)} = id_P$

Conclusion: les isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD sont id\_P;  $S_{(AC)}$ ;  $S_{(BD)}$  et  $S_O$ .

Exercice 5 1) Soit f une isométrie laissant invariant {B, C, C'}.

Si f(B) = B, f(C) = C et f(C') = C' comme B, C et C' sont non alignés alors

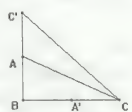
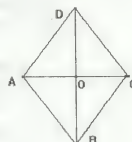
f = id\_P

2) f(B)  $\in \{B, C, C'\}$ . Supposons que f(B) = C alors f(C)  $\in \{C, B\}$ .

Si f(C) = C' alors BC = CC' ce qui est impossible car BCC' est

rectangle en B donc f(C)  $\neq C'$ . Si f(C) = B alors f(C') = C' d'où CC' = BC'

impossible donc f(C)  $\neq B$  et par suite f(B) = C.



3) Supposons que f(B) = C' alors f(C)  $\in \{B, C\}$ .

Si f(C) = B alors f(C') = C, par suite CC' = BC' impossible.

Si f(C) = C alors CB = CC' ce qui est impossible, par suite f(B) = C' et comme on a f(B)  $\neq C$

donc f(B) = B et f(C) = C' et f(C') = C par suite f soit une rotation de centre B, soit une symétrie orthogonale

d'axe  $\Delta = \text{méd}(CC')$ . Et Comme  $\widehat{(BC, BC')} \equiv \widehat{(BC', BC)} [2\pi]$

donc f n'est pas une rotation.

Conclusion: les isométries laissant invariant {B, C, C'} sont id\_P et  $S_B$  avec  $\Delta = \text{méd}(CC')$ .

Exercice 6: 1)  $R_1 = R_{\left(\frac{\pi}{3}, C\right)}(CO) \cap (CB) = \{C\}$ ;  $2) \widehat{(CO, CB)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$  donc  $R_1 = S_{(CB)} \circ S_{(OC)}$ ;  $\Delta_1 = (BC)$

2)  $R_2 = R_{\left(\frac{2\pi}{3}, O\right)}$

$(OI) \cap (OC) = \{O\}$

On a:  $2\widehat{(OI, OC)} \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$  donc  $R_2 = S_{(OC)} \circ S_{(OI)} = S_{(BC)} \circ S_{(OI)} = S_{(OI)}$

3)  $R_1 \circ R_2 = S_{(BC)} \circ S_{(OC)} \circ S_{(OI)} = S_{(BC)} \circ S_{(OI)}$

On a  $(CB) \perp (OI)$  en I donc  $S_{(BC)} \circ S_{(OI)} = S_I$  et par suite  $R_1 \circ R_2 = S_I$

4)  $R_3 = S_A \circ S_{(BC)}$ ,  $\Delta \perp (AB)$   $\Delta \parallel (CK)$ . On a (CK) coupe (BC) alors  $\Delta$  et (BC) sont sécantes; soit E

un point de  $\Delta$  distinct de B; On a  $S_A \circ S_{(BC)} = R_{\left(\frac{\pi}{2}, \overrightarrow{BE}\right)}$ . On a  $\widehat{(BC, BE)} \equiv \widehat{(CB, CK)} [\pi] \equiv \frac{\pi}{6} [\pi]$  donc

$R_3 = R_{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)}$ ;  $R_3 \circ R_1 = \left(S_A \circ S_{(BC)}\right) \circ \left(S_{(BC)} \circ S_{(OC)}\right) = S_A \circ S_{(OC)}$ , (OC) et  $\Delta$  sont parallèles par suite

$S_A \circ S_{(OC)}$  est une translation. Comme on a  $K \in (OC)$  et B le projeté orthogonal de K sur  $\Delta$  donc

$R_3 \circ R_1 = S_A \circ S_{(OC)} = t_{\overrightarrow{KB}} = t_{\overrightarrow{AB}}$

5) a) On a  $R_1 = R_{\left(\frac{\pi}{3}, C\right)}$  donc  $R_1^{-1} = R_{\left(\frac{\pi}{3}, C\right)}$ ;  $f = R_1^{-1} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = R_{\left(\frac{\pi}{3}, C\right)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$  or

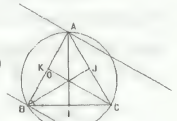
$(CA) \cap (CO) = \{C\}$

2)  $\widehat{(CO, CA)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$  donc  $R_1 = S_{(CA)} \circ S_{(CO)}$ , (OC) est orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  donc  $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(OC)} \circ S_A$ , avec

$\Delta'$  est la droite parallèle à (OC) passant par le point  $A = t_{\overrightarrow{KA}}(K)$ .

$f = R_{\left(\frac{\pi}{3}, C\right)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(CA)} \circ S_{(CO)} \circ S_{(CO)} \circ S_A = C_{(CA)} \circ S_A$ . Or  $\Delta \cap (AC) = \{A\}$

donc  $f = R_{\left(\frac{\pi}{3}, A\right)}$  avec E' un point de  $\Delta'$  distinct de A.









- 3)  $f$  admet un unique point invariant  $I(0;2)$ , donc  $f$  est une rotation de centre  $I$  et d'angle non nul.
- 4)  $I$  est d'affixe  $2i$ . On a  $0(0) \Rightarrow 0' = 1 + (2 - \sqrt{3})i$  ;  $(\overline{IO}, \overline{IO'}) \equiv \arg \left( \frac{z_0' - z_I}{z_0 - z_I} \right) [2\pi]$
- $$\Rightarrow (\overline{IO}, \overline{IO'}) \equiv \arg \left( \frac{1 - i\sqrt{3}}{-2i} \right) [2\pi] \Rightarrow (\overline{IO}, \overline{IO'}) \equiv \arg \left( \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right) [2\pi] \Rightarrow (\overline{IO}, \overline{IO'}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

Enfin  $f$  est une rotation de centre  $I(0;2)$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

**Exercice N° 14 :** Si  $M_1(z_1)$  et  $M_2(z_2)$  ;  $f(M_1) = M_1'(z_1')$  et  $f(M_2) = M_2'(z_2')$  ; On a

$M_1'M_2' = |z_2' - z_1'| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_2 - z_1) \right| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right| |z_2 - z_1| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$  d'où  $f$  est une application qui conserve les distances donc  $f$  est une isométrie.

$M(z)$  est invariant par  $f \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = z \Leftrightarrow x + iy = \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) (x - iy) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y = -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - 3y = -3 \end{cases}$$

par  $f$  est la droite  $\Delta : \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

**Exercice N° 15 :** 1) Soit  $M_1(x_1, y_1)$  et  $M_2(x_2, y_2)$  deux points du plan d'images respectives

$M_1'(x_1', y_1')$  et  $M_2'(x_2', y_2')$ . On a  $x_2' - x_1' = (1 - y_2) - (1 - y_1) = y_1 - y_2$  ;

$y_2' - y_1' = (2 - x_2) - (2 - x_1) = x_1 - x_2$  ;  $M_1'M_2'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$  ;

$M_1'M_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = M_1M_2'^2$ ,  $f$  est une transformation qui conserve les distances, donc  $f$  est une isométrie du plan.

2)  $M(z)$  est invariant par  $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow x' = x$  et  $y' = y \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - y = x \\ 2 - x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$  ce qui est impossible. Donc  $f$  ne possède aucun point invariant.

3)  $f$  est une isométrie qui n'admet aucun point invariant donc  $f$  est soit une translation de vecteur non nul soit une symétrie glissante. Or pour tout  $M(x, y)$  d'image  $M'(x', y')$  par  $f$ , on a

$MM' \left( \frac{x - x'}{y - y'} \right) \Rightarrow \frac{1 - y - x}{2 - x - y}$  donc les coordonnées de  $MM'$  ne sont pas constantes et par suite  $f$  n'est pas une translation et par suite  $f$  est une symétrie glissante.

**Exercice 16 :** 1) a) Soit  $C$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ ,  $C' = f(C)$  est le cercle circonscrit au triangle  $ACD$ ,  $C'$  est de centre  $O' = f(O)$ . Or  $O$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $ACD$  donc  $O' = O$ ,  $f(O) = O$ .  $ABC$  est rectangle en  $B$  donc  $f(ABC)$  est un triangle rectangle en  $f(B)$ , car l'isométrie conserve

l'orthogonalité. Puisque  $f(ABC) = ACD$  et  $ACD$  rectangle en  $D$ , donc  $f(B) = D$ .

b-  $f(O) = O \Rightarrow f$  est une isométrie fixe  $O$ , donc  $f$  soit l'identité du plan, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par  $O$ , ou une rotation de centre  $O$ . Comme  $f(B) = D \neq B$  donc  $f \neq \text{id}_P$ ,  $f = S_{(AC)}$  ou  $f = R_{(O, \pi)}$  ou  $f = R_{(O, \pi)}$ .

2)  $f_{AB} = S_{(OI)} \circ S_{(AB)}$ ,  $g_1 = f_{AB} \circ S_{(AB)} = S_{(OI)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} = S_{(OI)}$

$g_2 = f_{AB} \circ S_{(AB)} = f_{AB} \circ S_{(AB)} = f_{AB} \circ S_{(AB)} = f_{AB} \circ S_{(AB)} = f_{AB} \circ S_{(AB)}$  et comme  $\overline{DC}$  est un vecteur directeur de  $(OI)$  alors  $g_2$  est une symétrie glissante.

**Exercice 17 :**

1) a)  $g(B) = f \left[ f_{AB}^{-1}(B) \right] = f(A) = I$  et  $g(K) = f \left[ f_{AB}^{-1}(K) \right] = f(I) = K$

b)  $g$  est une isométrie  $\Rightarrow g$  est une rotation de centre  $K$  ou  $g(K) = K$

bien une symétrie orthogonale d'axe passant par  $K$ .

**1<sup>ère</sup> cas :**  $g = f_{(K, \alpha)}$ ,  $g(B) = I \Rightarrow \alpha = \widehat{(KB, KI)} [2\pi] = \widehat{(AI, AB)} [2\pi] = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \Rightarrow g = f_{(K, -\frac{\pi}{3})}$

**2<sup>ème</sup> cas :**  $g = S_{(K, \alpha)}$ ,  $g(B) = I \Rightarrow (K, \alpha) = \text{méd}(BI) = (AK) \Rightarrow g = S_{(AK)}$  **Conclusion :**  $g = f_{(K, -\frac{\pi}{3})}$  ou  $g = S_{(AK)}$

c)  $g = \text{rot}_{gK} \Leftrightarrow f = \text{rot}_{fK} \Leftrightarrow f = S_{(AK)} \circ f_{AB}$  ou  $f = f_{(K, -\frac{\pi}{3})} \circ f_{AB}$ .

2) a)  $\Delta = (K, \alpha)$  tel que  $\widehat{(KB, K\alpha)} = \frac{\pi}{6} [2\pi] \Rightarrow \Delta = (KH)$ ,  $\Delta' = (By)$  tel que  $\widehat{(BK, By)} = \frac{\pi}{6} [2\pi] \Rightarrow \Delta' = (BO)$ .

b)  $R_{(K, -\frac{\pi}{3})} \circ R_{(B, -\frac{\pi}{3})} = S_{(KH)} \circ S_{(BK)} \circ S_{(BK)} \circ S_{(BO)} = S_{(KH)} \circ S_{(BO)}$  d'autre part :

$(KH) \perp (AB)$ ,  $(BO) \perp (KI)$  et  $(KI) \parallel (AB) \Rightarrow (KH) \parallel (BO)$

donc  $R_{(K, -\frac{\pi}{3})} \circ R_{(B, -\frac{\pi}{3})}$  est une translation. En plus  $B$  se projette orthogonalement en  $H$  sur  $(HK)$

donc  $R_{(K, -\frac{\pi}{3})} \circ R_{(B, -\frac{\pi}{3})} = t_{BH} = t_{AB} \circ f_1 = R_{(K, -\frac{\pi}{3})} \circ f_{AB} = R_{(K, -\frac{\pi}{3})} \circ R_{(B, -\frac{\pi}{3})} \circ R_{(B, -\frac{\pi}{3})} \Rightarrow f_1 = R_{(B, -\frac{\pi}{3})}$ .

3) a)  $f_2(B') = S_{(AK)}(f_{AB}(B')) = S_{(AK)}(I)$  car  $B'I = \overline{IK} = \overline{AB} \Rightarrow f_2(B') = B$ .

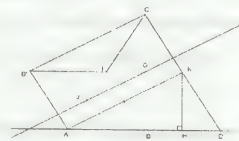
$f_2(B) = S_{(AK)}(f_{AB}(B)) = S_{(AK)}(D) = C$  car  $(AK) = \text{méd}(DC) \Rightarrow f_2(B) = C$ .  $f_1(A) = I$

b) Vérifier que  $f_1$  et  $f_2$  sont deux isométries qui coïncident sur 3 points non alignés  $A, B$  et  $B'$ .

a)  $\varphi(A) = f_1^{-1}(f_1(A)) = f_1^{-1}(I) = A$ ,  $\varphi(I) = f_1^{-1}(f_1(I)) = f_1^{-1}(K) = I$  et  $\varphi(B) = f_1^{-1}(f_1(B)) = f_1^{-1}(C) = B'$ .

$\varphi$  est une isométrie  $\varphi \neq \text{id}_P$  car  $\varphi(B) \neq B$  et  $\varphi$  fixe deux points distincts  $A$  et  $I \Rightarrow \varphi = S_{(AI)}$ .

b)  $f_1(M) = f_2(M) \Leftrightarrow f_1^{-1}(f_1(M)) = M \Leftrightarrow S_{(AI)}(M) = M \Leftrightarrow M \in (AI)$  d'où l'ensemble cherché est la droite  $(AI)$ .



## SOLUTION DES EXERCICES RELATIFS AU CHAPITRE

\*\*\*\*\*

**Exercice 1 :** 1) vrai ;  $f$  est un déplacement d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et  $g$  est un déplacement d'angle

$-\frac{\pi}{6}$ . Donc  $f \circ g$  est un déplacement d'angle  $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$  d'où  $f \circ g$  est une translation.

2) Vrai car  $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \neq 1$  et  $e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 \Rightarrow 3)$  vrai, (théorème)

4) Faux : le vecteur directeur de  $\Delta$  donc  $t_{\overline{OI}} \circ S_A$  est symétrie glissante n'admet pas aucun point fixe.

5) faux contre exemple on considère un carré  $ABCD$  de centre  $O$  et  $I = A^*B$

$t_{AB} \circ S_{(OI)} = S_{(AB)} \circ S_{(OI)} = S_{(AB)}$

6) Vrai :  $f \circ g^{-1}(B) = f(A) = B$   $f$  déplacement et  $g$  antidéplacement donc  $f \circ g^{-1}$  antidéplacement qui fixe  $B$  ; par suite  $f \circ g^{-1}$  est une symétrie orthogonale.

7) Vrai soit  $S_{(O, \pi)} : M(Z) \rightarrow M'(Z')$  tel que  $Z' = \overline{Z}$  avec  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé et

$t_{\overline{O}} : M(Z) \rightarrow M'(Z) : Z' = z + 1$  ;  $f = t_{\overline{O}} \circ S_{(O, \pi)}$  ;  $f = S_A \circ S_{(O, \pi)} \circ S_{(O, \pi)} = S_A$  avec  $\Delta = \text{méd}(OA)$

8) Vrai

**Exercice 2 :** 1) b) ; 2) c) ; 3) c) ; 4) a) ; 5) a) ; 6) c) ; 7) b) ; 8) c ; 9) b)

**Exercice 3 :**  $f$  est un déplacement d'angle

$(\overline{IB}, \overline{IC}) + (\overline{CI}, \overline{CB}) + (\overline{BC}, \overline{BI}) = (\overline{IB}, \overline{IC}) + (\overline{IC}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{BI}) [2\pi]$

$= (\overline{IB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{BI}) [2\pi] = (\overline{IB}, \overline{BI}) [2\pi] = \pi [2\pi]$

Comme  $\pi \neq 0 [2\pi]$   $f$  est une rotation d'angle  $\pi$

donc  $f$  est une symétrie centrale

b- on a  $\frac{(IC) \cap (IJ)}{2(IJ, IC)} = \frac{(IB, IC) [2\pi]}{2(IJ, IC) [2\pi]}$  donc  $R_1 = S_{(IC)} \circ S_{(IJ)} = S_{(IC)} \circ S_{A_1}$

$(IC) \cap (CJ) = \{C\}$  et  $2(\overline{CI}, \overline{CJ}) = (\overline{CI}, \overline{CB}) [2\pi]$  donc

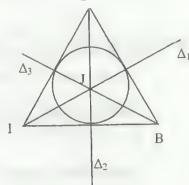
$R_2 = S_{(CJ)} \circ S_{(IC)} = S_{(A_2)} \circ S_{(IC)} \Rightarrow R_2 \circ R_1 = S_{A_2} \circ S_{(IC)} \circ S_{(IC)} \circ S_{A_1} = S_{A_2} \circ S_{A_1}$

c-  $f(I) = R_3 \circ R_2 \circ R_1(I) = R_3 \circ S_{A_2} \circ S_{A_1}(I) = R_3(J)$  car  $J \in \Delta_1 \cap \Delta_2$

$(BI) \cap (BJ) = \{B\}$

$$\frac{2(\overline{BI}, \overline{BJ})}{2(\overline{BI}, \overline{BI})} = \frac{2(\overline{BC}, \overline{BI}) [2\pi]}{2(\overline{BI}, \overline{BI}) [2\pi]}$$

donc  $R_3 = S_{(BI)} \circ S_{(A_1)} = S_{(BI)} \circ S_{A_1}$  ;  $f(I) = S_{(BI)} \circ S_{A_1}(I) = S_{(BI)}(J) = J_1$



2) a)  $\Omega$  le centre de  $f$ , on a  $f$  est une symétrie centrale donc

$f = S_{\Omega}$  ; or  $f(J) = J$  donc  $\Omega = J_1^* J$

b- On a  $S_{(IB)}(J) = J$  donc  $\Omega = J^* J_1 \in (IB)$  donc  $(IB)$  est tangente en  $\Omega$  au cercle inscrit au triangle  $ABC$ .

**Exercice 4 :** 1)  $AB = CD$  et  $CD \neq 0$  donc il existe un unique

déplacement qui transforme  $A$  en  $C$  et  $B$  en  $D$ ,

donc  $(\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv \pi [2\pi]$ ,  $\pi \neq 2k\pi$  donc  $f$  est une rotation d'angle  $\pi$  ;  $f$  est une symétrie centrale de centre  $O = A^*C$ .

2) a-  $f_1 = S_{(DE)} \circ S_{(BE)} : \frac{(DE) \cap (BE) = \{E\}}{2(\overline{EB}, \overline{ED})} = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$  donc  $f_1 = R_{(E, -\frac{2\pi}{3})}$

b-  $f_2(D) = R_{(B, \frac{\pi}{3})} \circ R_{(E, \frac{\pi}{3})}(D) = B$ ,  $R_{(C, \frac{\pi}{3})}$  déplacement d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $R_{(B, \frac{\pi}{3})}$  déplacement d'angle  $\frac{\pi}{6}$  d'où

$f_2$  est un déplacement d'angle  $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \neq 2k\pi$  donc  $f_2$  est une rotation  $r$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$  soit le centre de

$r : \frac{(\overline{OD}, \overline{OB})}{\omega_D = \omega_B} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  or  $\frac{(\overline{CD}, \overline{CB})}{\omega_D = \omega_B} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  donc  $\omega = C$  Par suite  $f_2$  rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre  $C$

c-  $f_3 = f_{(O, \frac{\pi}{2})}$  ;  $f_3^{-1} = f_{(O, -\frac{\pi}{2})}$  ;  $f_2 \circ f_3^{-1}(A) = f_2(D) = B$  ;  $f_3^{-1}$  déplacement d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et  $f_2$

déplacement d'angle  $\frac{\pi}{2}$  donc  $f_2 \circ f_3^{-1}$  est une translation. Comme  $f_2 \circ f_3^{-1}(A) = B$  alors  $f_2 \circ f_3^{-1} = t_{AB}$

3) a-  $M = S_A(B)$  ;  $f_3 = f_{(O, \frac{\pi}{2})}$ ,  $f_3(MD)$  est une droite passant par  $f_3(D) = A$  et perpendiculaire à

$(MD)$  donc  $f_3(MD) = \Delta$  ;  $f_3(AB) = (BC)$

$M \in (MD) \cap (AB) \Rightarrow f_3(M) \in f_3(MD) \cap f_3(AB) \Rightarrow f_3(M) \in \Delta \cap (BC) \Rightarrow M_1 \in \Delta \cap (BC) \Rightarrow f_3(M) = M_1$

b)  $f_2 \circ f_3^{-1}(M_1) = f_2(M) = M_2$  signifie  $t_{AB}(M_1) = M_2 \Rightarrow \overline{AB} = \overline{M_1M_2} \Rightarrow ABM_1M_2$  est un parallélogramme

4)  $g = f_{AB} \circ S_{(OA)} = S_{A_1} \circ S_{(OA)} = S_{A_1}$  avec  $\Delta_1 = \text{méd}(AM_1)$  ;  $g = S_{A_1}$   $\Rightarrow g$  est une symétrie orthogonale.

**Exercice 5 :** 1) a)  $M(z_1)$  ;  $M_2(z_2)$  ;  $A(I)$  ;  $B(I)$  ;  $M(z)$



$$M_1 = R_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}(M) \Leftrightarrow z_1 - 1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}(z-1) \Leftrightarrow z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}z + 1 - e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ d'où } z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$M_2 = R_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}(M) \Leftrightarrow z_2 - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + i - ie^{i\frac{\pi}{3}} \text{ d'où } z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$b) \frac{z_2 - i}{z_1 - 1} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)}{e^{-i\frac{\pi}{6}}(z-1)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{(z-i)}{(z-1)} = i \frac{(z-i)}{(z-1)}$$

$$2) a) \frac{z_2 - i}{z_1 - 1} = i \frac{(z-i)}{(z-1)} \text{ alors } \arg\left(\frac{z_2 - i}{z_1 - 1}\right) = \arg(i) + \arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) 2\pi \Leftrightarrow \arg(M_1; \overline{BM_2}) = \frac{\pi}{2} + \arg(\overline{AM}; \overline{BM}) 2\pi$$

$$b) E = \{M \in P \text{ tel que } (AM_1) \parallel (BM_2)\} \Leftrightarrow M \in E \Leftrightarrow (AM_1) \parallel (BM_2)$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AM_1}; \overline{BM_2}) = 0[2\pi] \Leftrightarrow (\overline{AM}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M \in \zeta_{\{AB\}} / \{A; B\}, \text{ alors } E = \zeta_{\{AB\}} / \{A; B\}.$$

$$c) M_2 = R_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}(M_1) \Leftrightarrow z_2 - z_1 = i - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + \sqrt{3} - 1 = i - 1$$

$$\Leftrightarrow z(1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i \Leftrightarrow z = \frac{(-\sqrt{3} + i) \times 2}{(1+i)(1+i\sqrt{3})} \Leftrightarrow z = \frac{2i(1+i\sqrt{3})}{(1+i)(1+i\sqrt{3})} = \frac{2i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1+i} = 1+i$$

$$3) M_1 = R_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}(M) \Leftrightarrow M = R_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}(M_1); M_2 = R_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}(M) = R_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left(R_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}(M_1)\right);$$

$$M_3 = R_{\left(\frac{\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}(M_1); M_3 = \varphi(M_1) \text{ avec } \varphi = R_{\left(\frac{\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}; M'' = \varphi(M) = R_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}(M') \text{ avec } M' = R_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}(M)$$

$$\text{donc } M' \text{ à pour affixe } z' = e^{i\frac{\pi}{6}}(z-1) + 1; M'' = R_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}(M') \text{ à pour affixe } z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z'-1) + 1$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}} \left[ e^{i\frac{\pi}{6}}(z-1) + 1 - 1 \right] + 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{\pi}{3}} + (1-i)e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = iz + (1-i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= iz + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \text{ d'où } M_3 = \varphi(M_1) \text{ avec } \varphi \text{ une rotation d'angle } \frac{\pi}{2} \text{ et de centre } \Omega(z_0) \text{ avec}$$

$$z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{(1-i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1-i} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \varphi = R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \text{ avec } \Omega\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

135

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Maths

$$\text{Exercice 6: } 1) R: M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}(Z - Z_0) + Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{4}}Z.$$

$$2) M \in P; h_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}(M) = M' \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AM} = \overline{AM'}$$

$$a) Z' - Z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - Z_0); Z' = \frac{1}{\sqrt{2}}Z; h: M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = \frac{1}{\sqrt{2}}Z$$

$$b) f = h \circ R: M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z.$$

$$c) \frac{\arg(\overline{MM'})}{\arg(\overline{AM'})} = \frac{Z' - Z}{Z' - Z_0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z - Z}{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z - Z}{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1+i}{1-i} = -\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i \in i\mathbb{R}$$

donc  $\overline{MM'}$  et  $\overline{AM'}$  sont orthogonaux et par suite  $\overline{AMM'}$  est un triangle rectangle en  $M'$ .

$$3) a) M_{n+1} = f(M_n) \Leftrightarrow Z_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z_n$$

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z_0 \neq 0$$

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z_1 \neq 0$$

.....

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z_{n-1} \neq 0$$

En multipliant membre à membre ces égalités puis en simplifiant on obtient

$$Z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n Z_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}Z_0.$$

$$b) M_n \in [AB] \cap \{A\} \Leftrightarrow \arg(Z_n) = \frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}Z_0\right) = \frac{\pi}{4}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow -n\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow -n\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow n \equiv 1[4]$$

en conclusion:  $M_n \in (\Delta: y=x) \setminus \{A\}$  équivaut à  $n \equiv 1+4k$  avec  $k$  dans  $\mathbb{N}$ 

$$\text{Exercice 7: } 1) a) R \text{ rotation d'angle } \frac{-\pi}{2} \neq 0[2\pi] \text{ alors } f = R \circ i \text{ est une rotation d'angle } \frac{-\pi}{2}$$

$$b) f(E) = R \circ i_{\overline{EC}}(E) = R(C) = R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}(C) = F.$$



136

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Maths

$$c) \frac{(BC) \perp (BE)}{(BC) \parallel (AD)} \Rightarrow (BE) \perp (AD) \text{ on a } O = B^*D = E^*G \text{ donc}$$

BGDE est un parallélogramme; donc  $(GD) \parallel (BE)$  et comme  $(BE) \perp (AD)$  alors  $(GD) \perp (AD)$ 

$$\left. \begin{array}{l} BC = DA \\ DG = DA \end{array} \right\} \text{ donc } BC = DG$$

$$\text{On a: } BC=AD \text{ donc } DG=AD(2); (1) \text{ et } (2) \text{ donne } ADG \text{ rectangle isocèle en } A. R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}(G) = A;$$

$$O = E^*G = A^*C \text{ donc } AGCE \text{ est un parallélogramme } (\overline{EC} = \overline{AG}) f(A) = R \circ i_{\overline{EC}}(A) = R(G) = A.$$

$$d) f \text{ rotation d'angle } \frac{-\pi}{2} \text{ et } f(A) = A, \text{ donc } f = R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$f(E) = F \text{ donc } AEF \text{ est un triangle rectangle et isocèle en } A.$$

$$2) a) ABCD \text{ un parallélogramme } \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}. Z_B - Z_A + Z_D - Z_A = Z_C - Z_A \Leftrightarrow Z_B + Z_D = Z_C.$$

$$b) R = R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}; R: M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_0) + Z_0 = -i(Z - Z_0) + Z_0.$$

$$c) R' = R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}; R': M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_0) + Z_0 = i(Z - Z_0) + Z_0.$$

$$R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}(C) = E \text{ donc } Z_E = i(Z_C - Z_0) + Z_0; \text{ or d'après 2) a) on a: } Z_C = Z_B + Z_D \text{ donc } Z_C - Z_0 = Z_D$$

$$Z_E = iZ_D + Z_0$$

$$d) R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}(C) = F \text{ donc } Z_F = -i(Z_C - Z_0) + Z_0; Z_F = -iZ_D + Z_0 = -i(Z_B + iZ_D) = -iZ_B$$

$$\frac{Z_E - Z_A}{Z_F - Z_A} = \frac{-iZ_D + Z_0}{-iZ_B + Z_0} = -i \frac{Z_D - Z_0}{Z_B - Z_0} \text{ donc } (AF) \perp (AE) \left| \frac{Z_E - Z_A}{Z_F - Z_A} \right| = |-i| = 1 \Rightarrow AF = AE \text{ donc le triangle } AEF \text{ est isocèle et rectangle en } A.$$

Exercice 8: 1) Soit  $M$  un point invariant par  $f_a$ .

$$f_a(M) = M \Leftrightarrow Z = e^{ia}Z + 3(1 - e^{ia}) \Leftrightarrow Z(1 - e^{ia}) = 3(1 - e^{ia})$$

$$\text{Si } e^{ia} = 1; \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = 1 \begin{cases} \cos(\alpha) = 1 \\ \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \text{ donc } \alpha = 0[2\pi]$$

0 = 3x0 donc tous les points du plan sont invariants par  $f_a$  dans ce cas  $f = id$ .

$$\text{Si } e^{ia} \neq 1 \text{ c'est-à-dire } \alpha \neq 0[2\pi]; Z = 3 \frac{1 - e^{ia}}{1 - e^{ia}} = 3 \text{ et dans ce cas l'ensemble des points invariants est le point } A(3).$$

$$2) a) \text{ pour que } f_a \text{ soit une translation il suffit que } e^{ia} = 1 \Leftrightarrow \alpha \equiv 0[2\pi]; Z' = Z \text{ donc } f_a = id$$

$$b) \text{ pour que } f_a \text{ soit une rotation il suffit que } e^{ia} \neq 1. \text{ c'est à dire } \alpha \neq 0[2\pi]$$

137

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Maths

$$3) \text{ montrons par récurrence que } B_n = f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})}(B_0) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Pour } n=1 \text{ on a:}$$

$$B_1 = f_{\frac{\pi}{2}}(B_0) = f_{\pi(1-\frac{1}{2})}(B_0) \text{ (donnée) vraie pour } n=1. \text{ Supposons que } B_n = f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})}(B_0) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*$$

$$\text{et montrons que } B_{n+1} = f_{\pi(1-\frac{1}{2^{n+1}})}(B_0) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*. \text{ On a } B_{n+1} = f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}}(B_n); \text{ d'après l'hypothèse de}$$

$$\text{récurrence } B_n = f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})}(B_0) \text{ donc } B_{n+1} = f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}}(f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})}(B_0)); \text{ or } f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \text{ est une rotation d'angle } \alpha \text{ pour tout}$$

$$\alpha \neq 0[2\pi]; f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \text{ est un déplacement d'angle } \frac{\pi}{2^{n+1}}; f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})} \text{ est un déplacement d'angle } \pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \text{ donc}$$

$$f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \circ f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})} \text{ est un déplacement d'angle } \frac{\pi}{2^{n+1}} + \pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \pi\left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1 - \frac{1}{2^n}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \neq 0[2\pi]$$

$$\text{Donc } f_{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \circ f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})} = f_{\pi(1-\frac{1}{2^{n+1}})} \text{ d'où } B_{n+1} = f_{\pi(1-\frac{1}{2^{n+1}})}(B_0) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Conclusion: } B_n = f_{\pi(1-\frac{1}{2^n})}(B_0) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

$$4) Z_n = e^{i\pi(1-\frac{1}{2^n})}Z_0 + 3(1 - e^{i\pi(1-\frac{1}{2^n})})$$

$$Z_n = X_n + Y_n = 6\cos\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + 6i\sin\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + 3\left[1 - \cos\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) - i\sin\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$\begin{cases} X_n = 6\cos\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + 3 - 3\cos\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\ Y_n = 6\sin\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) - 3\sin\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \end{cases}; \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \pi \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \cos\pi = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \sin\pi = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = -6 + 3 + 3 = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0$$

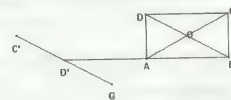
$$\text{Exercice 9: } a) D' = S_A(B) \text{ et } (AD) \perp (AB); \text{ alors}$$

$$(AD) = \text{med}[BD'] \text{ donc } DD' = DB. ABCD \text{ est un rectangle de centre } O$$

$$\text{alors: } DB = AC \text{ et comme } OA = \frac{1}{2}AC \text{ et } OB = \frac{1}{2}BD \text{ alors } OA = OB.$$

$$(\overline{AB}; \overline{AO}) \equiv (\overline{AB}; \overline{AC})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ donc } OAB \text{ est un triangle équilatéral direct donc } BO = BA;$$

$$\text{alors } 2BO = 2BA = BD'. \text{ Or on a: } DD' = DB \text{ et } DB = 2BO \text{ donc } DD' = BD' \text{ donc } D' \in \text{med}[BD]; \text{ de plus } O \in \text{med}[BD] \text{ car } O = B^*D \text{ donc } (D'O) = \text{med}[BD].$$



138

Mathématiques 4<sup>ème</sup> Maths



$$b- (\overline{AD}, \overline{OD}) = (\overline{AD}, \overline{DB}) + (\overline{DB}, \overline{OD}) [2\pi] = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} [2\pi] = \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

$$2) a) i) r \text{ est une rotation d'angle } (\overline{AB}, \overline{OD}) = (\overline{AB}, \overline{BO}) [2\pi] = \pi - \frac{\pi}{3} [2\pi] = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$ii) (\overline{OD'}) \text{ et } (\overline{AD}) \text{ sont sécantes alors } f \text{ est une rotation d'angle } 2(\overline{AD}, \overline{OD'}) = \frac{4\pi}{3} [2\pi].$$

$$c- r \circ f(D) = r \circ S_{(OD')} \circ S_{(AD)}(D) = r \circ S_{(OD)}(D) = r(B) = D \text{ car } (D'O) = \text{med}[BD] \text{ } r \text{ un déplacement d'angle } \frac{2\pi}{3} \text{ et } f \text{ un déplacement d'angle } \frac{4\pi}{3}; \text{ donc } r \circ f \text{ est un déplacement d'angle } \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \equiv 0 [2\pi].$$

$$r \circ f \text{ est une translation, de plus } r \circ f(D) = D; \text{ donc } r \circ f = \text{id}_P, r \circ f = \text{id}_P \text{ équivaut à } r = f^{-1}$$

$$d- r \text{ est une rotation de centre } I \text{ et } r(A) = O, \text{ donc } IA = IO; I \in \text{med}[OA]$$

$$r = f^{-1} \text{ est une rotation de centre } I; \text{ or } f \text{ et } f^{-1} \text{ ont le même centre donc } f = S_{(OD')} \circ S_{(AD)} \text{ de centre } I \text{ c'est-à-dire } I \in (OD') \cap (AD). \text{ Conclusion: } I \in (AD) \cap (OD') \cap \text{med}[OA].$$

$$3)a- f = S_{(OD')} \circ S_{(AD)} \text{ alors } f^{-1} = S_{(AD)} \circ S_{(OD')}; r(D) = f^{-1}(D) = S_{(AD)} \circ S_{(OD')}(D) = S_{(AD)}(B) = D'.$$

$$b- \overline{AB} = \overline{CD'} \text{ d'où } r(A)r(B) = r(C)r(D). \overline{OD} = \overline{D'C'}; \text{ ODC'D' est un parallélogramme } (r_{OD}(D') = C').$$

$$4) a) g(B) = S_{(OD')} \circ r(B) = S_{(OD')}(D) = B, S_{(OD')} \text{ est un antidéplacement et } r \text{ un déplacement, alors } g \text{ est un antidéplacement; de plus } g \text{ fixe le point } B \text{ donc } g \text{ est une symétrie orthogonale. } g(I) = S_{(OD')} \circ r(I) = S_{(OD')}(I) = I, g = S_{(BI)}.$$

$$b- G = g(C); G = S_{(BI)}(C).$$

$$c- g(C) = G; S_{(OD')} \circ r(G) = S_{(OD')}(C') = G \left. \begin{array}{l} S_{(OD')}(C') = G \\ (C'D') \perp (OD') \end{array} \right\} \text{ alors } D'G = G * C'.$$

$$d- (BO) \perp (D'O) \text{ car } (D'O) = \text{med}[BD] \\ (GD') \perp (D'O) \text{ car } (D'O) = \text{med}[GC'] \text{ donc } (BO) \parallel (GD').$$

$$\text{Par suite on a: } \left. \begin{array}{l} (BO) \parallel (GD') \\ D'G = OB \end{array} \right\} \text{ alors } BOD'G \text{ est un parallélogramme.}$$

$$\text{De plus } (D'O) \perp (BO) \text{ d'où } BOD'G \text{ est un rectangle.}$$

$$\text{Exercice 10: 1) } R \left( B; \frac{\pi}{3} \right) \text{ est un déplacement d'angle } \frac{\pi}{3}$$

$$t_{\frac{\pi}{3}} \text{ est un déplacement d'angle } 0; \text{ d'où } f \text{ est un déplacement d'angle } \frac{\pi}{3} + 0 = \frac{\pi}{3} \neq 2k\pi \text{ donc } f \text{ est une}$$

$$\text{rotation d'angle } \frac{\pi}{3}. f(B) = C$$

$$\text{or } \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \text{ car } ABC \text{ équilatéral} \\ (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ donc } f = R \left( A; \frac{\pi}{3} \right) \text{ avec } A \text{ le centre de } f \text{ d'après l'unicité du centre.}$$

$$2) a) g(B) = S_I \circ R \left( B; \frac{\pi}{3} \right) = S_I(B) = C$$

$$b) S_I \text{ déplacement d'angle } \pi \text{ et } R \left( B; \frac{\pi}{3} \right) \text{ est un déplacement d'angle } \frac{\pi}{3} \text{ donc } g \text{ est un déplacement}$$

$$\text{d'angle } \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \neq 2k\pi, S_I \text{ déplacement d'angle } \pi, g \text{ est une rotation d'angle } \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$c) g(G) = G \text{ et } g(B) = C \text{ donc } (\overline{GB}, \overline{GC}) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ or } ABC \text{ un triangle équilatéral donc}$$

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ et on a } \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{2\pi}{3} \right) = \pi \text{ donc } (\overline{AB}, \overline{AC}) = (\overline{GB}, \overline{GC}) [\pi], \text{ et on a: } A; B \text{ et } C \text{ trois points}$$

$$\text{non alignés donc } A; B; G \text{ et } C \text{ appartiennent à un même cercle } C. \text{ comme } A; B \text{ et } C \text{ sont trois points du cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ donc } A; B; G \text{ et } C \text{ appartiennent au cercle circonscrit au triangle } ABC. \quad GB = GC \text{ donc } G \in \text{med}[BC] \text{ donc } G \in (AD)$$

$$\text{Conclusion: } G \in (AD) \cap \zeta \text{ or } (AD) \text{ et } C \text{ se coupent en deux points } A \text{ et } \omega. \text{ Comme } (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{d'où } A \text{ n'est pas le centre, par suite } G = \omega.$$

$$3)a) g \text{ est un déplacement d'angle } -\frac{2\pi}{3}, g^{-1} \text{ est un déplacement d'angle } \frac{2\pi}{3} \text{ et on a } f \text{ un déplacement}$$

$$\text{d'angle } \frac{\pi}{3} \text{ donc } f \circ g^{-1} \text{ déplacement d'angle } \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi \neq 2k\pi \text{ donc } f \circ g^{-1} \text{ est une rotation d'angle}$$

$$\pi \text{ alors } f \circ g^{-1} \text{ est une symétrie centrale, comme } f \circ g^{-1}(C) = f(B) = C \text{ alors } f \circ g^{-1} = S_C$$

$$b) f \circ g^{-1}(M_2) = f(M) = M_1 \text{ donc } S_C(M_2) = M_1 \text{ donc } (M_1 M_2) \text{ passe par un point fixe } C \text{ lorsque } M \text{ décrit le plan } P \setminus \{C\}.$$

$$c) M_1 M_2 = AD \text{ équivaut à } 2CM_1 = AD \text{ (car } M_1 * M_2 = C) \Leftrightarrow M_1 \in \zeta \left( C; \frac{1}{2} AD \right)$$

$$\Leftrightarrow M = f^{-1}(M_1) \in \zeta(f^{-1}(C); \frac{1}{2} AD) = \zeta(B; \frac{1}{2} AD) \text{ car } f(B) = C \text{ donc } f^{-1}(C) = B \text{ } M \text{ décrit } \zeta(B; \frac{1}{2} AD)$$

$$4) h(B) = S_{(AD)} \circ R \left( B; \frac{\pi}{3} \right) = S_{(AD)}(B) = C; h(C) = S_{(AD)} \circ R \left( C; \frac{\pi}{3} \right) = S_{(AD)}(A) = A$$

$$R \left( B; \frac{\pi}{3} \right) \text{ déplacement et } S_{(AD)} \text{ antidéplacement donc } h \text{ est un antidéplacement.}$$

h soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante; supposons que h est une symétrie orthogonale d'axe  $\Delta$  on a:  $S_{\Delta}(B) = C$  donc  $\Delta \perp (BC)$ ;  $S_{\Delta}(C) = A$  donc  $\Delta \perp (AC)$  donc  $(BC)$  est parallèle à  $(AC)$ , or ceci est impossible car  $(AC) \cap (BC) = \{C\}$  par suite h est une symétrie glissante.

$$c) h = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} \text{ avec } \vec{u} \text{ un vecteur directeur non nul de } \Delta. h(C) = A \text{ donc } J = A * C \in \Delta; h(B) = C \text{ donc } I = B * C \text{ d'où } \Delta = (IJ) \text{ } h \circ h = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} \circ S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}}; h \circ h(B) = C \text{ donc } t_{\vec{u}}(B) = C$$

$$2\vec{u} = \overline{BC} \text{ donc } \vec{u} = \frac{1}{2} \overline{BC}; h = t_{\frac{1}{2} \overline{BC}} \circ S_{(U)} = S_{(U)} \circ t_{\frac{1}{2} \overline{BC}}$$

$$5) a) S_{(AC)}(B) = \Omega; S_{(AC)}(A) = C; S_{(AC)}(C) = A. \text{ On a: } ABC \text{ un triangle équilatéral direct et comme la symétrie orthogonale conserve les distances et change les mesures des angles orientés en leurs opposés alors } \Omega A \text{ est un triangle équilatéral indirect.}$$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} \\ (\overline{OA}, \overline{OC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ et d'après l'unicité du centre de rotation } \Omega \text{ est le centre de } r; r = R \left( \Omega; \frac{\pi}{3} \right)$$

$$r(A) = B \text{ donc } \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CE} \\ (\overline{AB}, \overline{CE}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{AC}, \overline{CE} \\ (\overline{AC}, \overline{CE}) = (\overline{AC}, \overline{AB}) + (\overline{AB}, \overline{CE}) [2\pi] = \frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{3} [2\pi] = 0 [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } \overline{AC} \text{ et } \overline{CE} \text{ sont colinéaires de même sens. Et comme } AC = AB = CE \text{ alors } C = A * B$$

$$b) \text{ soit } r(N) = M; \text{ on a: } r(A) = C \text{ donc } \left\{ \begin{array}{l} \overline{AN}, \overline{CM} \\ \overline{AN} = \overline{CM} \end{array} \right.$$

$$(\overline{CN'}, \overline{CM'}) = (\overline{CN'}, \overline{AN}) + (\overline{AN}, \overline{CM'}) [2\pi] = (\overline{AC}, \overline{AB}) + (\overline{AN}, \overline{CM'}) [2\pi] = \frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{3} [2\pi] = 0 [2\pi]$$

$$\text{Donc } \overline{CN'} \text{ et } \overline{CM'} \text{ deux vecteurs colinéaires de même sens et comme } CM = AN \text{ et } AN = CN' \text{ donc}$$

$$CN' = CM \text{ alors } r(N) = N' \text{ et comme } r(\Omega) = \Omega \text{ on a donc: } \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega N} = \overline{\Omega N'} \\ (\overline{\Omega N}, \overline{\Omega N'}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ donc } \Omega N N' \text{ est équilatéral.}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ méthode: } \overline{AN} = \frac{AN}{AB} \overline{AB} \text{ donc } r(A)r(N) = \frac{AN}{AB} r(A)r(B)$$

$$\overline{CM} = \frac{AN}{AB} \overline{CE} \text{ et comme } \overline{CN'} = \frac{CN'}{CE} \overline{CE} \text{ on a: } \overline{CN'} = \overline{CM} \text{ par suite } N' = M \text{ donc } r(N) = N'$$

$$\text{Exercice 11: } g(A) = f \circ S_{(AD)}(A) = f(A) = C \\ g(D) = f \circ S_{(AD)}(D) = f(D) = B \quad S_{(AD)} \text{ antidéplacement}$$

; f antidéplacements

$$\text{donc } g \text{ est un déplacement. Or } S_0(A) = C \text{ et } S_0(D) = B \text{ donc } g \text{ et } S_0 \text{ sont deux}$$

$$\text{déplacements coïncident sur deux points distincts } A \text{ et } D \text{ donc } g = S_0.$$

$$b- g = f \circ S_{(AD)} \text{ or } S_0 = f \circ S_{(AD)} \Leftrightarrow S_0 \circ S_{(AD)} = f,$$

$$(IJ) \perp (EF) \text{ et } (IJ) \cap (EF) = \{O\} \text{ donc } S_0 = S_{(EF)} \circ S_{(IJ)} \text{ or } (IJ) \parallel (AD) \text{ et } I \text{ le projeté orthogonal de } A \text{ sur}$$

$$(IJ) \text{ donc } S_{(IJ)} \circ S_{(AD)} = t_{\vec{u}} \text{ or } \overline{AB} \text{ est un vecteur directeur de } (EF)$$

$$f = S_{(EF)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(AD)} = S_{(EF)} \circ t_{\vec{u}} \text{ or } \overline{AB} \text{ est un vecteur directeur de } (EF)$$

$$\text{donc } f \text{ est une symétrie glissante d'axe } (EF) \text{ et de vecteur } \overline{AB}$$

$$\text{Exercice 12: 1) } f \text{ une isométrie tel que: } f(A) = B; f(J) = K \text{ et } f(I) = I.$$

$$a- \text{ on pose } f(C) = C'; J = A * C \text{ donc } f(J) = f(A) * f(C) \text{ [car l'isométrie conserve les milieux];}$$

$$K = B * C'; S_K(B) = C'; \text{ donc } C' = A.$$

$$b- 1^{\text{ère}} \text{ méthode: } (\overline{JA}, \overline{JI}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ car dans le triangle } ABC \quad J = A * C;$$

$$I = B * C, \text{ donc } (IJ) \parallel (AB) \text{ et comme } (AB) \perp (JA) \text{ alors } (JA) \perp (IJ). (\overline{KB}, \overline{KI}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$f \text{ une isométrie qui conserve les mesures des angles orientés; alors } f \text{ est un déplacement.}$$

$$f \text{ est d'angle } (\overline{AJ}, \overline{BK}) = (\overline{AJ}, \overline{BA}) [2\pi] = (\overline{AJ}, \overline{AB}) + (\overline{AB}, \overline{BA}) [2\pi] = \frac{-\pi}{2} + \pi [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$\frac{\pi}{2} \neq 0 [2\pi] \text{ donc } f \text{ est une rotation. Or } IA = IB \text{ et } (\overline{IA}, \overline{IB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ car } ABC \text{ isocèle en } A \text{ et } I = B * C \text{ donc } f \text{ est de centre } I.$$

$$2^{\text{ème}} \text{ méthode: On a: } r_{\left( I; \frac{\pi}{2} \right)}(A) = B; r_{\left( I; \frac{\pi}{2} \right)}(J) = K; r_{\left( I; \frac{\pi}{2} \right)}(I) = I$$

$$r_{\left( I; \frac{\pi}{2} \right)} \text{ et } f \text{ deux isométries coïncident sur 3 points non alignés } A, J \text{ et } I \text{ donc } f = r_{\left( I; \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$3^{\text{ème}} \text{ méthode: } f(I) = I \text{ et } f \neq \text{id} \text{ car } f(A) = B \neq A, \text{ donc } f \text{ soit une symétrie orthogonale d'axe } \Delta \text{ passant par } I, \text{ soit une rotation de centre } I.$$

$$\text{si } f \text{ est une symétrie orthogonale d'axe } \Delta, \text{ alors } \Delta = \text{med}[AB] = \text{med}[JK], \text{ ce ci est impossible car } (AB) \text{ et } (JK) \text{ sont sécantes en } K, \text{ donc } f \text{ n'est pas une symétrie orthogonale d'où } f \text{ est une rotation de centre } I \text{ et d'angle } (\overline{IA}, \overline{IB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$











$$\delta = (AI) \quad \text{Be } (AI) \text{ donc } g(B) = f(B) = R_{(0; -\frac{\pi}{2})}(B) = A$$

$$4) a) f = R_{(0; -\frac{\pi}{2})}; Z_0 = 1 + i, f(M) = M' \Leftrightarrow Z - Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_0) \Leftrightarrow Z' = -iZ + 2i$$

$$b) g = f \circ S_{(AI)}; S_{(AI)}: P \rightarrow P, M(Z) \rightarrow M'(Z'); \text{ tel que: } Z' = \bar{Z} \text{ donc } g: P \rightarrow P \text{ tel que: } Z' = -i\bar{Z} + 2i = -i(\bar{Z} + 2i)$$

$$5) a) \text{ Pour } n=0; AM_0 = AA' = \vec{0} = 2\vec{IJ}; \text{ vraie pour } n=0. \text{ Supposons que } \overline{AM_{2n+1}} = 2n\vec{IJ} \text{ et montrons que } \overline{AM_{2(n+1)}} = 2(n+1)\vec{IJ}. \text{ On a } \overline{AM_{2n+2}} = \overline{AM_{2n+1}} + \overline{M_{2n+1}M_{2n+2}}, \text{ or } g = S_{(IJ)} \circ t_{\vec{IJ}}.$$

$$g' = t_{2\vec{IJ}}; g' \circ g(M_{2n+1}) = g(M_{2n+1}) = M_{2n+2}; \overline{AM_{2n+2}} = 2n\vec{IJ} + 2\vec{IJ} = (2n+2)\vec{IJ}.$$

Donc d'après le principe de récurrence,  $2n\vec{IJ} = \overline{AM_{2n}}$ .

$$b) 2n\vec{IJ} = \overline{AM_{2n}} \text{ donc } M_{2n} \text{ est un point de la droite qui passe par A et parallèle à } (IJ).$$

Donc  $M_{2n+1} = g(M_{2n})$  est un point de la droite qui passe par  $g(A) = D$  et parallèle à  $g(IJ) = (IJ)$ .

$$\text{Exercice 21: (E): } Z' - 2Z^2 - iZ + 3 - i = 0$$

$$1) a) Z = -1; (-1)^2 - 2(-1)^2 - i(-1) + 3 - i = -1 - 2 + i + 3 - i = 0 \text{ donc } -1 \text{ est une solution réelle.}$$

$$b) (Z+1)(Z^2 + aZ + b) = 0 \Leftrightarrow Z^3 + Z^2 + aZ^2 + bZ + aZ + b = 0 \Leftrightarrow Z^3 + (1+a)Z^2 + (b+a)Z + b = 0$$

$$\begin{cases} 1+a = -2 \\ b+a = -i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -i+3 \end{cases}. \text{ Donc: (E): } (Z+1)(Z^2 - 3Z + 3 - i) = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(3-i) = 9 - 12 + 4i = -3 + 4i;$$

$$\delta^2 = -3 + 2(2i) = -4 + 1 + 2(2i) = 1 + 2(2i) - 4 = 1 + 2(2i) = (1+2i)^2 \Rightarrow \delta = 1+2i$$

$$\Rightarrow Z_1 = \frac{3+1+2i}{2} = 2+i; \quad Z_2 = \frac{3-1-2i}{2} = 1-i$$

$$2) A(-1); \quad Z_B = 1-i; \quad Z_C = 2+i. \quad R_{(A; \frac{\pi}{2})}(B) = B'. \quad Z_{B'} - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A) = i(1-i+1) = 1-i+1 = 2-i$$

$$\Rightarrow Z_{B'} = i(1-i+1) + Z_A = i+1-i-1 = 2i \quad \text{Donc } Z_{B'} = 2i.$$

$$AB = AB'$$

$$b) \left( \overline{AB; AB'} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ Pour montrer que } ABCB' \text{ est un carré il suffit de montrer que } ABCB' \text{ est un}$$

parallélogramme. Montrons que:  $\overline{AB} = \overline{B'C}$ .  $Z_B - Z_A = Z_C - Z_{B'} \Leftrightarrow 1-i+1 = 2+i-2i \Leftrightarrow 2-i = 2-i$

Donc  $\overline{AB} = \overline{B'C}$ ; par suite  $ABCB'$  un parallélogramme

$$\text{Or } R_{(A; \frac{\pi}{2})}(B) = B' \Rightarrow (\overline{AB; AB'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow (AB) \perp (AB') \text{ et } AB = AB'. \text{ Alors } ABCB' \text{ est un carré.}$$

$$3) f(A) = C; f(B) = B'$$

$$a) S \text{ est un déplacement; } S_{(AB)} \text{ est un antidéplacement. Donc } S \circ S_{(AB)} \text{ est un antidéplacement}$$

$$S \circ S_{(AB)}(A) = S(A) = C, \quad S \circ S_{(AB)}(B) = S(B) = B'$$

$$\text{et } S \circ S_{(AB)} \text{ sont deux antidéplacements coïncident sur deux points distincts A et B alors } f = S \circ S_{(AB)}$$

$$b) f = S \circ S_{(AB)} = R_{(f; \pi)} \circ S_{(AB)}$$

$$f = R_{(IAB)} \circ S_{(IF)} \circ S_{(IB)} \circ S_{(AB)} \text{ avec } E = B^*C; F = A^*B \text{ car } (IE) \cap (IF) = \{I\} \quad 2(\overline{IE; IF}) = \pi [2\pi]$$

On a:  $(IE) \parallel (AB)$  alors  $S_{(IB)} \circ S_{(AB)} = t_{\vec{BE}} \circ f = S_{(IF)} \circ f$ ; on a:  $\overline{BC} \neq \vec{0}$  et  $\overline{BC}$  vecteur directeur de  $(IF)$  car  $(BC) \parallel (IF)$ .  $S_{(IF)} \circ f$  forme réduite une symétrie glissante.  $f = S_{(IF)} \circ f_{\overline{BC}} = f_{\overline{BC}} \circ S_{(IF)}$ .

$$4) g: P \rightarrow P \text{ tel que: } Z' = i\bar{Z} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i. \text{ Soient: } M_1(Z_1); M_2(Z_2); g(M_1) = M'_1(Z'_1); g(M_2) = M'_2(Z'_2). \text{ Montrer que: } M_1M_2 = M'_1M'_2$$

$$M'_1M'_2 = |Z'_2 - Z'_1| = \left| i\bar{Z}_2 + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i - (i\bar{Z}_1 + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i) \right| = |i\bar{Z}_2 - i\bar{Z}_1| = |i(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1)| = |\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1| = |Z_2 - Z_1| = M_1M_2$$

D'où  $M_1M_2 = M'_1M'_2$ , par suite  $g$  conserve les distances donc  $g$  est une isométrie.

$$b- g(E) = E'; \quad Z_E = i\bar{Z}_E + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = i\bar{Z}_E + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = \frac{5}{2} = Z_E \Rightarrow E = E'; g(F) = F'$$

$$Z_F = i\bar{Z}_F + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = i(2 + \frac{1}{2}i) + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = 2i - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = 2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = 2 = Z_F \Rightarrow F = F'; g(F) = F'$$

c)  $g$  est une isométrie qui fixe deux points distincts  $E$  et  $F$ ; donc  $g$  soit une symétrie orthogonale d'axe  $(EF)$ , soit l'identité ou  $g = id_P$  car  $Z' \neq Z$

$$\text{Exercice 22: } 1) S_A \text{ est un déplacement d'angle } \pi, \quad t_{AC} \text{ est un déplacement}$$

$$\text{d'angle } 0 \quad R_{(B; \frac{\pi}{2})} \text{ un déplacement d'angle } \frac{\pi}{2}. \text{ Donc } f \text{ est un déplacement d'angle } \frac{3\pi}{2} \neq 2k\pi$$

$$\text{d'où } f \text{ est une rotation. Comme on a } f(A) = A \text{ donc } f = R_{(A; \frac{3\pi}{2})}.$$

$$2) AB = BC \neq 0 \text{ car } ABCD \text{ est un carré, donc il existe un unique déplacement } g \text{ du plan tel que } g(A) = B \text{ et } g(B) = C; g \text{ est un déplacement d'angle}$$

$$(\overline{AB; BC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et de centre } O = \text{med}[AB] \cap \text{med}[BC]; g = R_{(O; \frac{\pi}{2})}.$$

$$3) \text{ Soit } M \text{ un point du plan tel que } f(M) = g(M) \text{ équivaut à } g^{-1} \circ f(M) = M$$

$$g \text{ est un déplacement d'angle } \frac{\pi}{2}, g^{-1} \text{ est un déplacement d'angle } -\frac{\pi}{2}, f \text{ est un déplacement d'angle}$$

$$\frac{3\pi}{2}, g^{-1} \circ f \text{ est un déplacement d'angle } -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \pi, \text{ donc } g^{-1} \circ f \text{ est une rotation d'angle } \pi,$$

$$g^{-1} \circ f \text{ est une symétrie centrale. Comme } g^{-1} \circ f(A) = g^{-1}(A) = R_{(O; \frac{\pi}{2})}(A) = D. \text{ Donc } g^{-1} \circ f = S, \text{ car } I$$

$$= A^*D, \quad S(M) = M \text{ donc } I = M \text{ par suite } f \text{ et } g \text{ coïncident en un seul point } I.$$

$$4) h \text{ est une isométrie glissante donc } h \text{ soit une symétrie glissante; soit une symétrie orthogonale donc } h \text{ est une symétrie glissante; } h \text{ s'écrit d'une manière unique sous la forme } h = t_{\vec{u}} \circ S_A = S_A \circ t_{\vec{u}};$$

$$\text{avec } \vec{u} \text{ un vecteur directeur non nul de } \Delta; h \circ h(A) = C \text{ donc } \vec{u} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

$$h(A) = B \text{ donc } K = A^*B \in \Delta, h(B) = C \text{ donc } L = B^*C \in \Delta, \text{ par suite } \Delta = (KL); h = t_{\frac{1}{2}\overline{AC}} \circ S_{(KL)}.$$

$$5) a) S_A = R_{(A; \pi)}; S_A: M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = e^{i\pi}(Z - Z_A) + Z_A = -(Z - (-1)) - 1 = -Z - 2$$

$$t_{AC}: M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = Z + (Z_C - Z_A) = Z + 1 - (-1) = Z + 2$$

$$\text{Donc } t_{AC} \circ S_A: M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = (-Z - 2) + 2 = -Z$$

$$R_{(B; \frac{\pi}{2})}: M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_B) + Z_B = i(Z - (-i)) - i = iZ - 1 - i$$

$$f = R_{(B; \frac{\pi}{2})} \circ t_{AC} \circ S_A: M(Z) \rightarrow M'(Z') \text{ tel que } Z' = i(-Z - 2) - 1 - i = -iZ - 1 - i \text{ Donc } f \text{ est une rotation d'angle}$$

$$-\frac{\pi}{2} \text{ et de centre } \Omega\left(\frac{-1-i}{1+i}\right); \Omega(-1). \text{ Donc } \Omega = A; \text{ par suite } f = R_{(A; -\frac{\pi}{2})}.$$

$$b) \text{ Soit } M_1 \text{ et } M_2 \text{ deux points du plan tels que: } \varphi(M_1) = M'_1 \text{ et } \varphi(M_2) = M'_2$$

$$M'_1M'_2 = |Z'_2 - Z'_1| = |i(Z_2 + i + 1) - (i(Z_1 + i + 1))| = |i(Z_2 - Z_1)| = |Z_2 - Z_1| = M_1M_2, \varphi \text{ conserve les distances, donc } \varphi \text{ est une isométrie. Soit } M \text{ un point invariant par } \varphi; \text{ alors } \varphi(M) = M$$

$$M(Z); Z = x + iy \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$x + iy = i(x + iy) + i + 1 = i(x - iy) + i + 1 \text{ équivaut à } x + iy = i(x - iy) + i + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = y + 1 + 1 = y + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = y + 2 \end{cases} \text{ ce qui est impossible; par suite } \varphi \text{ est une isométrie qui n'admet pas des points invariants;}$$

donc  $\varphi$  soit une translation, soit une symétrie glissante? On a:  $Z' = Z + b$  donc  $\varphi$  n'est pas une translation d'où  $\varphi$  est une symétrie glissante,  $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_A = S_A \circ t_{\vec{u}}, \varphi(O) = O'; Z_O = i\bar{O} + i + 1 = i + 1$

$$\varphi(O) = O'; Z_{O'} = i(\bar{O} + i + 1) + i + 1 = i(-i + 1) + i + 1 = 2 + 2i \quad \varphi \circ \varphi(O) = O''; \quad \varphi \circ \varphi = t_{2\vec{u}} \text{ donc}$$

$$2\vec{u} = \overline{OO''} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} \overline{OO''}$$

$$\varphi(O) = O' \text{ donc } E = O^*O' \in \Delta; Z_E = \frac{i+1}{2}, \varphi(O') = O'' \text{ donc } F = O^*O'' \in \Delta; Z_F = \frac{3+3i}{2}, \varphi = t_{\frac{1}{2}\overline{OF}} \circ S_{(EF)}$$

$$c- g \circ h(A) = g(B) = C; g \circ h(B) = D; Z_A = -1 \text{ et } Z_B = -i \quad \varphi(A) = A'; Z_{A'} = i\bar{Z}_A + i + 1 = -i + i + 1 = 1 = Z_C,$$

$$\varphi(A) = C \quad \varphi(B) = B' \text{ alors } Z_B = i\bar{Z}_B + i + 1 = i(-i + i + 1) + i + 1 = 2 + 2i; \varphi(B) = D$$

$$g \text{ déplacement} \quad \left. \begin{array}{l} \text{h antidéplacement} \\ g \circ h \text{ et } \varphi \text{ sont deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts A et B donc } \varphi = g \circ h. \end{array} \right\} \text{ donc } g \circ h \text{ est un antidéplacement}$$

$$d- \varphi = g \circ h = R_{(O; \frac{\pi}{2})} \circ t_{\frac{1}{2}\overline{AC}} \circ S_{(KL)} = S_{(OB)} \circ S_{(KL)}; R_{(O; \frac{\pi}{2})} = S_{(OL)} \circ S_{(OB)}$$

$$\varphi = S_{(OL)} \circ S_{(OB)} \circ S_{(KL)} \circ S_{(KL)} = S_{(OL)} \circ S_{(KL)} \circ S_{(KL)}$$

$$6) \text{ soit } \psi \text{ une isométrie qui transforme la paire } \{A, B\} \text{ en la paire } \{B, C\}, \text{ donc } \psi(A) = B \text{ et}$$

$$\psi(B) = C \text{ ou } \psi(A) = C \text{ et } \psi(B) = B. \text{ D'après ce qui précède il existe un seul déplacement } g \text{ et un seul}$$

$$\text{antidéplacement } h \text{ transformant A en B et B en C. Cherchons les isométries } \psi \text{ tel que } \psi(A) = C \text{ et}$$

$$\psi(B) = B; \text{ il existe un unique déplacement } \psi \text{ tel que } \psi(B) = B \text{ et } \psi(A) = C; \psi \text{ est une rotation de}$$

$$\text{centre B et d'angle } (\overline{BA; BC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ où } \psi \text{ est une symétrie orthogonale d'axe } (DB) = \text{med}[AC].$$

Conclusion: Il existe quatre isométries transformant la paire  $\{A, B\}$  en la paire  $\{B, C\}$  sont:

$$g; h; R_{(B; -\frac{\pi}{2})} \text{ et } S_{(BD)}.$$

$$\text{Exercice N° 23: } \Delta: 2x - y + 1 = 0$$

$$f = t_{\vec{u}} \circ S_A; \vec{u} \left( \frac{1}{2} \right) \text{ est un vecteur directeur de } \Delta \text{ et } \vec{u} \left( \frac{1}{2} \right) \text{ est un vecteur normal à } \Delta. \text{ Soit A le milieu de } [MM']. \text{ On pose } M(x, y), M'(x', y') \text{ et } M''(x'', y'').$$

$$S_A(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ et } \overline{MM'} \text{ sont colinéaires} \\ A \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 2\beta \\ y' - y = -\beta \\ 2\left(\frac{x' + x}{2}\right) - \left(\frac{y' + y}{2}\right) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2\beta \\ y' = y - \beta \\ 5\beta + 4x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - \frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5} \\ y' = y + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$t_{\vec{u}}(M') = M'' \Leftrightarrow \overline{M'M''} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' - x' = 1 \\ y'' - y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' + 2 \end{cases}$$

$$\text{Donc On a } f(M) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{1}{5} \\ y'' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{12}{5} \end{cases} \text{ est l'expression analytique de } f.$$

$$\text{Exercice N° 24: } 1) A, B \text{ et } C \text{ sont alignés donc } \overline{AB} \text{ et } \overline{AC} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{aff}(\overline{AB})}{\text{aff}(\overline{AC})} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{b-a}{-b-a} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ Soit } r \text{ la rotation de centre A et qui transforme C en E alors } r = R\left(A; \frac{\pi}{2}\right) \text{ car } (\overline{AC; AE}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et}$$

$$\text{par suite } r: P \rightarrow P; M(z) \rightarrow M'(z') \text{ avec } z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z + \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)Z_A. \text{ On a } r(C) = E \Leftrightarrow z_E = iz_C + (1-i)Z_A, \text{ or}$$

$$Z_A = a \text{ et } Z_C = -b \text{ donc } e = -ib + (1-i)a$$

$$b) \text{ On a } R\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)(B) = F; f = Z_E = e^{-i\frac{\pi}{2}}Z_B + \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)Z_A \Rightarrow f = ib + (1+i)a. \text{ On a AEFH est un parallélogramme}$$

$$\text{donc } \overline{FH} = \overline{AE} \text{ d'où } z_H - z_F = z_E - z_A \text{ donc } z_H - z_A = e - a + f \text{ or } e = -ib + a(1-i) \text{ et } f = -ib + (1+i)a \text{ et}$$

$$\text{par suite } h = z_H = -2ib + a$$

$$\text{On a } h = z_H = -2ib + a, \text{ On a ACDE est un parallélogramme donc } \overline{CD} = \overline{AE} \text{ d'où } z_D - z_C = z_E - z_A \text{ et par}$$

$$\text{suite } d = z_D = z_E - z_A + z_C = e - a - b = -ib - ai - b$$



- 3) a)  $\frac{EF}{OA} = \frac{z_E - z_F}{z_O - z_A} = \frac{e - f}{a} = \frac{-2ia}{a} = -2i$  et par suite  $EF = 2OA$ ;  $\frac{aFF}{aFO} = \frac{-2ia}{a} = -2i \in i\mathbb{R} \Rightarrow (FE) \perp (OA)$   
 b)  $\frac{EF}{OA} = \frac{z_E - z_F}{z_O - z_A} = 1$  et par suite  $BD = CH$ ;  $\frac{aFB}{aCH} = \frac{d-b}{h-c} = -1 \in i\mathbb{R} \Rightarrow (BD) \perp (CH)$

**Exercice N° 25 :** ABC : isocèle de sommet principale A or  $(\overline{ABAC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et  $K = B^*C$

1) a)  $\varphi(B) = C$  et  $\varphi(C) = B$ ; montrons que  $\varphi(K) = K$   $K = B^*C$  Or  $\varphi$  conserve le milieu donc  $\varphi(K) = \varphi(B)^* \varphi(C) = C^*B = K$  Montrons que  $\varphi((AK)) = (AK)$  on a  $(AK) \perp (BC)$  Or  $\varphi$  conserve l'orthogonalité donc  $\varphi((AK)) \perp \varphi((BC))$  d'où  $\varphi((AK)) \perp (BC)$  or  $\varphi(K) = K \in (AK) \Rightarrow \varphi((AK))$  est la perpendiculaire à  $(BC)$  passant par  $K$  d'où  $\varphi(K) = (AK)$  (car  $(AK) = \text{med}[BC]$ )

b)  $\zeta$  est le cercle de diamètre  $[BC]$  donc  $\varphi(\zeta) =$  cercle de diamètre  $\varphi([BC]) = [BC]$  d'où

$\varphi(\zeta) = \zeta$  A  $\in (AK) \cap \zeta$  (Car ABC est rectangle en A) d'où  $\varphi(A) \in \varphi((AK)) \cap \varphi(\zeta)$  d'où

$\varphi(A) \in (AK) \cap (\zeta)$  On a  $(AK) \cap (\zeta) = \{A, A'\}$  où  $A' = S_K(A)$

**1<sup>ère</sup> cas** si  $\varphi(A) = A$  et on a  $\varphi(B) = C$  et  $\varphi(C) = B$  (donc  $\varphi \neq \text{Id}$  car  $\varphi(B) \neq B$ ) A est un point fixe or  $\varphi(K) = K \Rightarrow K$  est un point fixe donc  $\varphi$  fixe deux points distinct A et K (et  $\varphi \neq \text{Id}$ ) d'où  $\varphi = S_{(AK)}$

**2<sup>ème</sup> cas** si  $\varphi(A) = A'$ , on a  $\varphi(K) = K \Rightarrow K$  est un point fixe par  $\varphi$  Montrons que K est un seul point fixe par

$\varphi$  Si M est un autre point fixe par  $\varphi$  et on a  $\varphi(B) = C$  donc M  $\in$  méd  $[BC]$  et  $\varphi(A) = A'$  donc

M  $\in$  méd  $[AA']$  d'où M  $\in$  méd  $[AA'] \cap$  méd  $[BC] \Rightarrow M = K$  d'où  $\varphi$  admet un seul point fixe : c'est

$K \Rightarrow \varphi = R_{(K, \theta)}$  où  $\theta = \angle(B\bar{C}, \bar{C}B) = \pi[2\pi]$  d'où  $\varphi = R_{(K, \pi)} = S_K$

2) a)  $K = A^*A' = B^*C$  or ABC est rectangle et isocèle  $\Rightarrow \overline{ABA'C}$  est un carré

b) On a  $B'A' = A'A$  car  $B = A^*B'$   $(A'B) \perp (BB') \Rightarrow (A'B) = \text{méd}[AB']$  On a  $A'B' = AA'$  et  $A'B' \neq 0$  d'où il existe un unique déplacement  $R_1$   $R_1(B') = A'$  et  $R_1(A') = A$  On a  $r_{(B', \frac{\pi}{2})}(B') = A$  et  $r_{(B', \frac{\pi}{2})}(A') = A$  or

$R_1(B') = A'$  et  $R_1(A') = A$  donc  $R_1$  et  $r_{(B', \frac{\pi}{2})}$  coïncident en deux points distincts d'où  $R_1 = r_{(B', \frac{\pi}{2})}$  Montrons

que  $R_1 \circ \varphi = \text{Id}$  on a  $\varphi = S_K \Rightarrow R_1 \circ \varphi = r_{(B', \frac{\pi}{2})} \circ S_K = R_{(A, \frac{\pi}{2})}$  or  $R_1 \circ \varphi(A) = R_1(A') = A \Rightarrow A$  est le point fixe

d'où  $R_1 \circ \varphi = R_{(A, \frac{\pi}{2})}$

3) a)  $f = r_{(K, \frac{\pi}{2})}$  Or  $r_{(A, \frac{\pi}{2})}(C) = A$ ,  $g = r_{(K, \frac{\pi}{2})}$  Or  $r_{(A, \frac{\pi}{2})}(C) = A'$

b)  $g = r_{(K, \frac{\pi}{2})}$  Or  $r_{(A, \frac{\pi}{2})}(C) = A$  or  $f(B) = A \Rightarrow \omega = A^*B$  or  $I = A^*B \Rightarrow f = S_I$

$g = r_{(K, \frac{\pi}{2})}$  Or  $r_{(A, \frac{\pi}{2})}(C) = A$  or  $g(B) = A' \Rightarrow \bar{\omega} = \overline{BA'} = \overline{AC} \Rightarrow \boxed{g = r_{AC} = t_{AC}}$

4)  $f \circ S_{(AB)} = S_{(A, \theta)} \circ S_{(AB)} = S_{(K, \theta)}$  or  $S_{(AB)} = S_{(K, \theta)}$  or  $S_{(AB)} = S_{(K, \theta)}$  or  $S_{(AB)} = S_{(K, \theta)}$  or  $S_{(AB)} = S_{(K, \theta)}$

## Devoir de contrôle N° 1 (Exemple 1)

**Exercice N° 1 :** A) 1)  $U_{2n} = \frac{2n}{2n+1}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(2n+1)}{3n+2} = -1$ .

Donc  $(U_n)$  est divergente. (Faux)

2)  $\frac{k}{2n^2+1} \leq U_k \leq \frac{k}{2n^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2+1} \leq \sum_{k=1}^n U_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2(2n^2+1)} \leq S_n \leq \frac{n(n+1)}{2(2n^2)}$

On a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(2n^2+1)} = \frac{1}{4}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(2n^2)} = \frac{1}{4}$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$  (Vrai)

B) 1)  $\rightarrow c$ ; 2)  $\rightarrow c$ ; 3) a) ii. b) iii.

**Exercice N° 2 :** voir Exercice N° 8 (Continuité)

**Exercice N° 3 :** voir Exercice N° 24 (Suites)

**Exercice N° 4 :** voir Exercice N° 7 (Complexe)

**Exercice N° 5 :** voir Exercice N° 14 (Complexe)

## Devoir de contrôle N° 1 (Exemple 2)

**Exercice N° 1 :** A) 1)  $U_{2n} = \frac{1-2n}{1+2n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{2n} = -1$ ;  $U_{2n+1} = \frac{1+2n+1}{-1+2n+1}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+1} = 1$ . On

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+1}$  donc  $(U_n)$  est divergente. (Faux)

2)  $U_1 = U_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^0$ ;  $U_2 = U_1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^1$ ; .....;  $U_n = U_{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ .

Donc  $U_n = U_0 + \left[-\frac{1}{3}\right]^0 + \left[-\frac{1}{3}\right]^1 + \left[-\frac{1}{3}\right]^2 + \dots + \left[-\frac{1}{3}\right]^{n-1} = U_0 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 1 + \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$  (Vrai)

3)  $U_1 = f(U_0) = f(6) = 5 < U_0 = 6$  donc  $(U_n)$  est décroissante (Faux).

B) 1) b); 2) b); 3) c

**Exercice N° 2 :** voir exercice N° 14 (Dérivabilité)

**Exercice N° 3 :** voir exercice N° 23 (Suites)

**Exercice N° 4 :** voir exercice N° 5 (Complexe)

**Exercice N° 5 :** Voir exercice N° 19 (Complexe)

## Devoir de synthèse N° 1 (Exemple 1)

**Exercice N° 1 :** 1) c); 2) a); 3) a) 4) c)

**Exercice N° 2 :** voir Exercice N° 20 (Déplacement)

**Exercice N° 3 :** Voir Exercice N° 9 (Fonction réciproque)

**Exercice N° 4 :** Voir Exercice N° 20 (Complexe)

**Exercice N° 5 :** 1) a)  $(E) : z^2 - 2(1+i)(\sin \theta)z + 4 \sin \theta = 0$ ;

$\theta \in ]-\pi; \pi[$   $\Delta' = 2i(\sin^2 \theta - 2i \sin \theta - 1) - 4 \sin \theta = 2i \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 2i - 4 \sin \theta = -2i(1 - \sin^2 \theta)$

$= (1-i)^2 \cos^2 \theta = [(1-i) \cos \theta]^2$ .

$z' = (1+i)(\sin \theta - i) + (1-i) \cos \theta = (\sin \theta + \cos \theta + 1) + i(\sin \theta - \cos \theta - 1)$

$z'' = (1+i)(\sin \theta - i) - (1-i) \cos \theta = (\sin \theta - \cos \theta + 1) + i(\sin \theta + \cos \theta - 1)$

E admet des racines doubles  $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0$  et  $\theta \in ]-\pi; \pi[ \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$  ou  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Si  $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z' = z'' = 2$  et Si  $\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow z' = z'' = -2i$

b)  $z' = (1+i)(\sin \theta - i) + (1-i) \cos \theta = i(1-i)(\sin \theta - i) + (1-i) \cos \theta$

$= (1-i)[\cos \theta + i(\sin \theta - i)] = (1-i)(\cos \theta + i \sin \theta + 1) = (1-i)(e^{i\theta} + 1)$

$z'' = (1+i)(\sin \theta - i) - (1-i) \cos \theta = i(1-i)(\sin \theta - i) - (1-i) \cos \theta = (1-i)[- \cos \theta + i(\sin \theta - i)]$

$= (1-i)(1 - \cos \theta + i \sin \theta + 1) = (1-i)(1 - \cos \theta + i \sin \theta) = (1-i)(1 - e^{-i\theta})$

2) A  $(1-i)$ ; B  $(-2i)$ ; M  $(\sqrt{2}e^{i\theta})$ ;  $M_1(z_i = (1-i)(1+e^{i\theta}))$ ;  $M_2(z_i = (1-i)(1-e^{-i\theta}))$

a)  $z_1 = (1-i)(1+e^{i\theta}) = (1-i) + (1-i)e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta} + (1-i) = e^{-i\frac{\pi}{4}}z + (1-i)$

Rappel :  $\theta \neq 2k\pi$   $k \in \mathbb{Z}$ ; L'application :  $f : P \rightarrow P$ ;  $M(z) \mapsto M'(z')$  tel que :  $z' = e^{i\theta}z + b$  est une

rotation d'angle  $\theta$ , de centre A d'affixe :  $z_A = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$ ;  $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}z + (1-i)$ ;  $-\frac{\pi}{4} \neq 2k\pi$  donc  $M_1(z_1)$  est

l'image de  $M(z)$  par la rotation R d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  de centre  $\Omega$  dont l'affixe

est :  $z_\Omega = \frac{1-i}{1-e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1-i}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-i}{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{(1-i)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{(1-i)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1-\sqrt{2}+1} = \frac{(1-i)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2-\sqrt{2}}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) M d'affixe  $z = \sqrt{2}e^{i\theta} \Rightarrow |z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow OM = \sqrt{2}$ . Donc M appartient au cercle de centre O et de rayon  $\sqrt{2}$ .

$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \end{cases}$  Lorsque  $\theta$  varie dans  $]-\pi; \pi[$  M

décrit le cercle de centre O et de rayon  $\sqrt{2}$ . Comme  $M_1 = R(M)$  donc lorsque  $\theta$  décrit  $]-\pi; \pi[$ ;  $M_1$  décrit le

cercle de rayon  $\sqrt{2}$  de centre R(O) d'affixe  $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z + (1-i) = 1-i = z_A$

Lorsque  $\theta$  varie dans  $]-\pi; \pi[$  M décrit le cercle de centre A et de rayon  $OA = \sqrt{2}$

c)  $\overline{(AB; AM_1)} \equiv \arg \left( \frac{z_1 - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$ . Or  $\frac{z_1 - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1-i)(1+e^{i\theta}) - (1-i)}{-2i - (1-i)} = \frac{(1-i)(1+e^{i\theta} - 1)}{(1-i)^2 - (1-i)}$

$= \frac{(1-i)e^{i\theta}}{(1-i)(1-i-1)} = \frac{e^{i\theta}}{-1} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\pi}}$ .

D'où  $\overline{(AB; AM_1)} \equiv \arg \left( \frac{z_1 - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi] \equiv \arg \left( e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \right) [2\pi] \equiv \theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Construction de  $M_1$  dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{8}$

$\overline{(AB; AM_1)} \equiv \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} [2\pi] \equiv \frac{5\pi}{8} [2\pi]$ . Donc  $M_1 \in (AT)$ .

Ou T un point tel que :  $\overline{(AB; AT)} \equiv \frac{5\pi}{8} [2\pi]$  D'autre part  $M_1 \in \xi_{(A, OA)}$

et par suite :  $M_1 = \xi_{(A, OA)} \cap (AT)$

3) a) I le milieu de  $[M, M_1]$ ;  $z_I = \frac{z_M + z_{M_1}}{2} = \frac{2(1-i)(1+i \sin \theta)}{2} = (1-i)(\sin \theta - i) = (\sin \theta + 1) + i(\sin \theta - 1)$

$\begin{cases} x = 1 + \sin \theta \\ y = \sin \theta - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = x - 1 \\ y = (x - 1) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ \theta \in ]-\pi; \pi[ \end{cases}$

Lorsque  $\theta$  décrit  $]-\pi; \pi[$ ; I décrit le segment  $[BB']$  où B'(2)

b)  $\theta \in ]-\pi; \pi[ \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\}$  On a  $M_1 \neq M_2$  aff  $\overline{(M_1 M_2)} = z_2 - z_1 = (1-i)(1-e^{-i\theta}) - (1-i)(1+e^{i\theta})$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -2 \cos \theta (1-i) = -2 \cos \theta \text{ aff } (\overline{OA}) \Leftrightarrow M_1 M_2 = -2 \cos \theta \overline{OA}$

$= (1-i)(1-e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) = -(1-i)(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$



c)  $(M_1 M_2) \parallel (OA)$  avec  $(OA) : y = -x$  et  $(BB') : y = x - 2 \Rightarrow (OA) \perp (BB')$  ; le produit des coefficients directeurs de  $(OA)$  et  $(BB')$  est égal à  $-1$ . Donc  $(M_1 M_2) \perp (BB')$  et par suite  $(BB')$  est médiatrice de  $[M_1 M_2]$  alors  $M_1$  et  $M_2$  sont symétriques par rapport à  $(BB') : y = x - 2$ . L'ensemble des points

$M_2$  lorsque  $\theta$  décrit  $]-\pi; \pi[$   $M_1$  décrit le cercle  $\xi_{(A, \sqrt{2})}$ . Or  $\begin{cases} M_2 = S_{(BB')} (M_1) \\ \text{et } A \in (BB') \end{cases} \Rightarrow M_2 \text{ décrit } S_{(BB')} (\xi) = \zeta$

4) a)  $\Gamma = \left\{ M(z) \in \mathbb{P} \text{ tel que : } \arg \left( \frac{z}{z+2i} \right) = -\frac{\pi}{4} [\pi] \right\}$  ;  $z \neq 0$  et  $z \neq -2i$  ;

$$M(z) \in \Gamma \Leftrightarrow \arg \left( \frac{z}{z+2i} \right) = -\frac{\pi}{4} [\pi] \Leftrightarrow \arg \left( \frac{z}{z-(-2i)} \right) = -\frac{\pi}{4} [\pi] \Leftrightarrow \arg \left( \frac{z}{z-(-2i)} \right) = -\frac{\pi}{4} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MO}) = -\frac{\pi}{4} [\pi] \Leftrightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} [\pi]$$

Soit  $A'(-1-i)$  ; On a  $OA'BA$  est un carré de sens

direct.  $\arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} [\pi] \Leftrightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi]$ . Donc  $\Gamma$  est le cercle  $\zeta \gamma \{O; B\}$  avec  $\zeta'$  est le cercle qui passe par  $O$  et  $B$  et tangente à la droite  $(OA')$  en  $O$ .

b)  $\forall \theta \in ]-\pi; \pi[ \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\}$  On a  $\frac{z_1}{z_1+2i} = \frac{(1-i)(1+e^{i\theta})}{(1-i)(1+e^{i\theta}) - (-2i)} = \frac{(1-i)(1+e^{i\theta})}{(1-i)(1+e^{i\theta}) - (-1-i)}$

$$= \frac{(1-i)(1+e^{i\theta})}{(1-i)(1+e^{i\theta}) - (-1-i)} = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} + e^{-i\theta} + i} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{2\cos\frac{\theta}{2} + i} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2} + i} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2} + i} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\forall \theta \in ]-\pi; \pi[ \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\} ; \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \in \left] -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[ \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : Si } \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right[ \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} > 0 \\ \text{et } \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow \left( \frac{z_1}{z_1+2i} \right) = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\frac{\theta}{2}} : \text{forme exponentielle de } \frac{z_1}{z_1+2i}$$

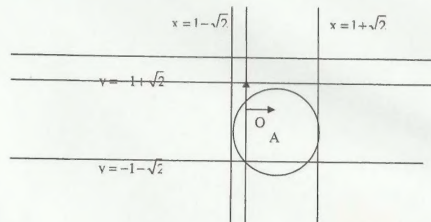
$$2^{\text{ème}} \text{ cas : Si } \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[ \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} > 0 \\ \text{et } \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left( \frac{z_1}{z_1+2i} \right) = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{z_1}{z_1+2i} = \frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\frac{\theta}{2}} = \frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ Il est clair que } \forall \theta \in ]-\pi; \pi[ \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\} \arg\left(\frac{z_1}{z_1+2i}\right) = -\frac{\pi}{4} [\pi] \text{ et par suite}$$

$$M_1(z_1) \in \Gamma = \xi_{(A, \sqrt{2})} \setminus \{O; B\}$$

Pour  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  ;  $z_1 = -2i = z_B \Rightarrow M_1 = B$  ; Pour  $\theta = \pi$  ;  $z_1 = 0 = z_O \Rightarrow M_1 = O$ . Donc  $M_1 \in \xi_{(A, \sqrt{2})}$

D'autre part ;  $z_1 = (\sin\theta + \cos\theta + 1) + i(\sin\theta - \cos\theta - 1)$



$$M_1(x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = \sin\theta + \cos\theta + 1 \\ y = \sin\theta - \cos\theta - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \\ y = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in ]-\pi; \pi[ \Rightarrow \begin{cases} \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \\ \left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1] \\ \cos\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \\ \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}] \\ y \in [-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}] \end{cases} \text{ Donc lorsque } \theta$$

varie dans  $]-\pi; \pi[$ , le point  $M_1$  décrit le cercle  $\xi_{(A, \sqrt{2})}$

## Devoir de synthèse N° 1 (Exemple 2)

Exercice N° 1 : 1) c) ; 2) b) ; 3) b)

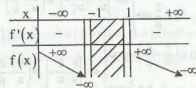
Exercice N° 2 : Voir Exercice N° 23 (Complexe)

Exercice N° 3 : voir Exercice N° 10 (Déplacement)

Exercice N° 4 : voir Exercice N° 17 (Fonction réciproque)

Exercice N° 5 : 1) a) Faux ; b) Vrai ; c) Vrai

2) a)



$$\text{II) on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x}) = 0$$

(asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \text{ signifie } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{x^2-1}} + \alpha = b = -1 ; f(\sqrt{2}) = a\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ d'où } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - x.$$

2) a)

$$A_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - x \right) dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 \right) dx = \left[ \sqrt{x^2-1} - x \right]_1^{\sqrt{2}} = \sqrt{2-1} - \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ (ua)}$$

b)

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sqrt{\lambda^2-1} - \lambda - 1 + \sqrt{2} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{\lambda^2-1}-\lambda)(\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda} + \sqrt{2} - 1 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda} + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 \text{ (ua)}$$

$$y(\lambda) \in ]-\pi; \pi[ \Rightarrow \arg\left(\frac{z}{z+2i}\right) = -\frac{\pi}{4} [\pi] \Rightarrow \arg\left(\frac{z}{z-(-2i)}\right) = -\frac{\pi}{4} [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MO}) = -\frac{\pi}{4} [\pi]$$

$$\arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi]$$

$$\arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi]$$

$$\arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi]$$

$$\arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi]$$

$$\arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi]$$

$$\arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi] \Rightarrow \arg(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) = \arg(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB}) [\pi]$$